La Transformada en ondículas o wavelet

G. Miramontes, J. I. De la Rosa, Ma. A. Araiza, J. J. Villa, C. Sifuentes, y E. García

The Wavelet transform
the why and what for

Recibido: octubre 5, 2010
Aceptado: noviembre 26, 2010

Palabras clave: Trasformadas; análisis tiempo-frecuencia; ondículas

Abstract:
Oscillation and oscillation frequency are two concepts widely accepted, not only in engineering and in many other disciplines, but also in our daily lives. We know that many natural phenomena which exhibit oscillations, for example, the rotation of the planet, moon phases, among others. Some oscillations are, however, something odd, or irregular, for example, the come and go of wave sea, the movement (tremor) of the earth during an earthquake, and many more. A useful tool to represent the frequency content of a signal is the Fourier transform. However, this tool is not enough if the signal to be analyzed is not stationary, ie, if its characteristics (statistics and frequency) change with time. This paper presents a suitable tool to analyze such signals, the wavelet transform, or also known by its English name as wavelet

Keywords: Transfoms; time-frequency analysis; wavelets

OSCILACIÓN y frecuencia de oscilación son dos conceptos ampliamente aceptados, no sólo en la ingeniería y en muchas otras disciplinas, si no también en nuestra vida diaria. Sabemos que hay muchos fenómenos naturales que presentan oscilaciones, como por ejemplo, el movimiento de rotación del planeta, las fases de la luna, entre otros. También tenemos eventos no naturales que podemos clasificar como periódicos, como por ejemplo la sucesión presidencial que se repite cada seis años. Algunas oscilaciones son, sin embargo, algo extrañas, o irregulares, como por ejemplo, el vayven de las olas del mar, el movimiento (temblor) de la tierra durante un sismo, entre muchos más. Además, se tienen oscilaciones de periodo corto (alta frecuencia) y oscilaciones de periodo largo (baja frecuencia). En la ingeniería eléctrica se tienen algunas señales que son claramente oscilatorias con una frecuencia estable, mientras que otras como las señales de voz, presentan oscilaciones de

varias frecuencias y que además cambian con el tiempo, o aparecen y desaparecen.
Una herramienta útil para representar el contenido de frecuencias de una señal es la transformada de Fourier. Sin embargo, esta herramienta no es suficiente si la señal que se desea analizar no es estacionaria, es decir, si sus características (estadísticas y de frecuencia) cambian.

Representación en tiempo y representación en frecuencia

Casi todas las señales físicas se obtienen por medio de sensores o transductores que registran (o graban) sus variaciones en el tiempo. Usualmente la representación en el tiempo es la más natural y la primera que se estudia. En la Figura 1 se muestra la representación en el tiempo de una señal de voz cuando se dice la vocal /a/. La representación en frecuencia es también una descripción muy importante de una señal, ya que es útil en muchas áreas o disciplinas como la física, la astronomía, la economía, la biología, y muchas más, donde ocurren eventos periódicos. Esta sección está basada en el trabajo de [1].

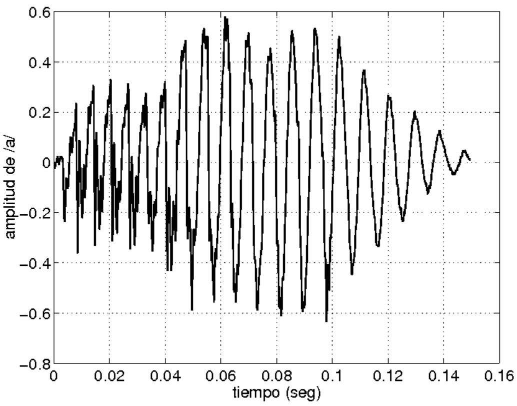

Figura 1. Representación en el tiempo del sonido /a/.

La representación en frecuencia de $x(t)$ se obtiene por la transformada de Fourier dada por:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt, \qquad (1)$$

donde f está dada en Hz.
$X(f)$ puede verse como la expansión de $x(t)$ en una familia de ondas de duración infinita $e^{j2\pi ft}$, las cuales no están localizadas en el tiempo, es decir, el espectro $X(f)$ nos indica esencialmente cuáles frecuencias están contenidas en la señal $x(t)$, así como sus amplitudes y sus fases correspondientes, pero no nos indica cuándo ocurren estas frecuencias. En la Figura 2 se muestra el espectro del sonido /a/.

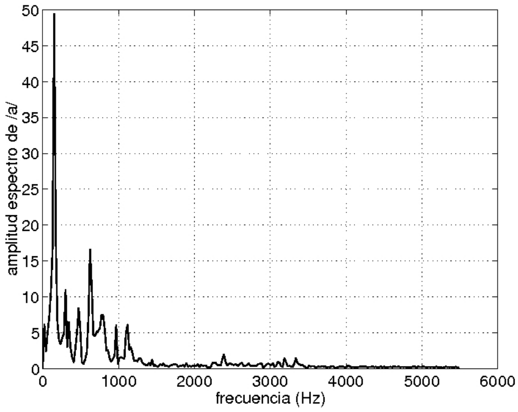

Figura 2. Representación espectral del sonido /a/.

En muchas aplicaciones es de interés conocer cuál es el contenido de frecuencias a un tiempo dado. Este concepto tampoco es desconocido. Por ejemplo, aunque no tengamos conocimientos de música, sabemos que en notación musical, en el pentagrama, se indica qué notas (frecuencias) se deben tocar a un momento dado y durante cuánto tiempo.
Una forma simple de caracterizar una señal simultáneamente en tiempo y frecuencia es considerar su localización y dispersión promedio en tiempo y frecuencia. Considerando a $|x(t)|^2$ y $|X(f)|^2$ como distribuciones de probabilidad y observando sus valores promedio y sus desviaciones estándar, tenemos

$$\bar{t} = \frac{1}{E_x}\int_{-\infty}^{\infty} t|x(t)|^2 dt$$
$$\text{promedio temporal} \qquad (2)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{E_x}\int_{-\infty}^{\infty} f|X(f)|^2 df$$
$$\text{promedio en frecuencia} \qquad (3)$$

$$T^2 = \frac{4\pi}{E_x}\int_{-\infty}^{\infty} (t-\bar{t})^2|x(t)|^2 dt$$
$$\text{dispersión en tiempo} \qquad (4)$$

$$B^2 = \frac{4\pi}{E_x}\int_{-\infty}^{\infty} (f-\bar{f})^2|X(f)|^2 df$$
$$\text{dispersión en frecuencia,} \qquad (5)$$

donde E_x es la energía de la señal la cual se supone es acotada, es decir,

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty. \tag{6}$$

Entonces se puede caracterizar una señal en un plano tiempo-frecuencia por su posición promedio $(\bar{t}, \bar{f})$ y su dominio de localización de energía principal cuya área es proporcional al producto $T \times B$, llamado así, “producto tiempo-ancho de banda”, donde T es la duración de la señal, y B es el ancho de banda.

Una condición importante, conocida como la desigualdad de Heisenberg-Gabor, es la cota inferior del producto $T \times B$,

$$T \times B \geq 1. \tag{7}$$

La (7) indica que una señal no puede tener al mismo tiempo un soporte arbitrariamente pequeño en tiempo y frecuencia. Esta cota inferior se alcanza para funciones Gaussianas, es decir aquellas de la forma

$$g(t) = Ce^{-\alpha(t-\bar{t})^2 + j2\pi\bar{f}(t-\bar{t})}, \tag{8}$$

donde $C \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \mathcal{R}_+$.

Señales no estacionarias

Una razón importante que motivó el desarrollo de nuevas herramientas para el análisis tiempo-frecuencia es que, en muchos casos prácticos, las señales pueden tener cambios significativos en sus características, es decir, pueden variar en intensidad o amplitud y en su contenido de frecuencias mientras evolucionan en el tiempo. Si se trata de una señal mono-componente, entonces se puede hablar de amplitud instantánea y frecuencia instantánea, es decir, que sólo existe una sola componente de frecuencia a cada instante de tiempo. Si se trata de una señal multi-componente, los conceptos de amplitud instantánea y frecuencia instantánea pierden su significado. Además, por otro lado, las señales pueden ser estacionarias o no estacionarias.

Localización en el tiempo del contenido espectral

La transformada de Fourier no está adaptada al análisis de señales no-estacionarias ya que proyecta la señal en ondas de duración infinita (sinusoides), las cuales están completamente no-localizadas en tiempo. Un ejemplo simple sería observar el espectro de la palabra /hola/ por medio de la transformada de Fourier. Es claro que el sonido que se produce en la palabra /hola/ está compuesto de varias frecuencias y que éstas no son las mismas al inicio y al final de la palabra. Lo deseable es que podamos observar qué frecuencias se producen en el inicio y al final de la palabra.

Intuitivamente, la solución consiste en recortar la señal $x(t)$ alrededor de un tiempo t, calcular su transformada de Fourier y repetir ese cálculo para otro espacio de tiempo. A este proceso se la conoce como la Transformada de Fourier en tiempo corto o STFT (*Short Time Fourier Transform*), dada por

$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)w(u-t)e^{j2\pi fu}du. \tag{9}$$

Otros nombres dados a este procedimiento de cálculo son transforma de Fourier por ventanas (*Windowed Fourier Transform*) donde $w(t)$ es una función que define una ventana de observación temporal, llamada ventana de análisis de tiempo corto, ésta está localizada alrededor de t=0 y f=0. Así la STFT es un espectro “local” de la señal $x(t)$ alrededor de t.

En la Figura 3 se muestra el espectro de la palabra /hola/, donde puede observarse que no hay información del tiempo. En la Figura 4 se muestra el espectro por la STFT de misma palabra. Puede verse que ahora sí se tiene información acerca del tiempo en que ocurren las diferentes componentes de frecuencia.

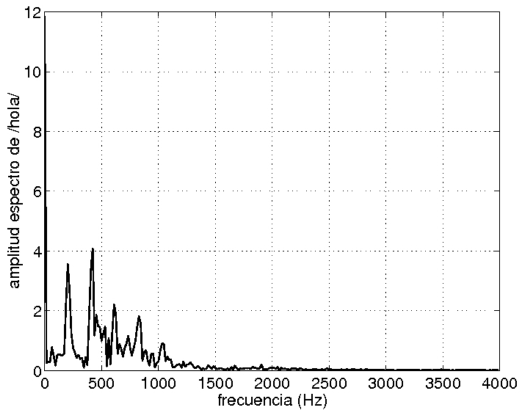

Figura 3. Espectro de frecuencia de la palabra /hola/.

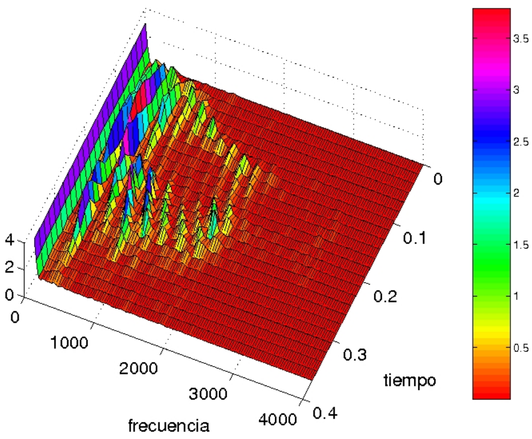

Figura 4. Espectro por STFT de la palabra /hola/.

Siempre y cuando la ventana sea de energía finita, la STFT es invertible, es decir,

$$x(t) = \frac{1}{E_w} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(u,\xi) w(t-u) e^{j2\pi t\xi} du d\xi, \qquad (10)$$

donde

$$E_w = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt. \qquad (11)$$

Esta relación expresa que la señal total puede descomponerse como una suma ponderada de formas de onda elementales

$$w_{t,f}(u) = w(u-t) e^{j2\pi f u} \qquad (12)$$

las cuales son llamadas “ tomos”. Cada tomo se obtiene de la ventana $w(t)$ por traslación en el tiempo y traslación en frecuencia.

La transformada en Ondículas o *Wavelet*

La STFT tiene ciertas dificultades para poder entregar, simultáneamente, buena resolución en tiempo y frecuencia, es decir, para analizar una señal que representa una oscilación con periodo largo se requerirá una ventana suficientemente larga de modo que se pueda “medir” la frecuencia de oscilación, mientras que si la oscilación es de periodo corto será suficiente tener una ventana de duración corta.

Para mostrar este problema haremos uso de las Figuras 5 y 6 las cuales se obtuvieron usando la STFT de 8 notas musicales tocadas consecutivamente [2]. En la Figura 5 se muestra el resultado del espectrograma cuando se emplea una ventana de observación de sólo 64 muestras. En este caso se tiene una pobre resolución en frecuencia y buena resolución en tiempo. En la Figura 6 se emple una ventana de 512 muestras y en este caso se mejora la resolución en frecuencia pero se reduce la resolución en tiempo.

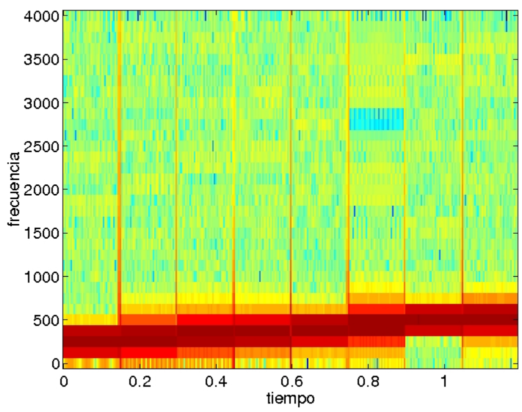

Figura 5. Espectrograma con ventana de 64 muestras.

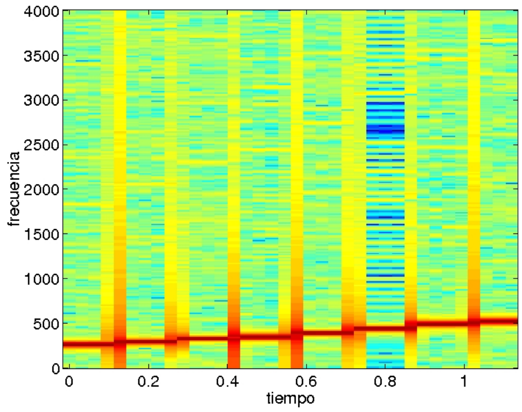

Figura 6. Espectrograma con ventana de 512 muestras.

La transformada Wavelet (TW) da una descripción tiempo-frecuencia similar pero con diferencias importantes. En palabras podríamos explicarlo de la siguiente manera:

- El uso de una ventana introduce efectos secundarios en el análisis de la señal, ya que le afectan la duración y forma de onda de la ventana.
- Las funciones elementales (funciones básicas) que forman la transformada de Fourier son de duración infinita y por lo tanto no están localizadas en tiempo.

Por lo anterior, el desarrollo de una nueva transformada que evite los problemas anteriores es más que bienvenida, esta transformada es la TW la cual

- No necesita del uso de funciones ventana
- Utiliza nuevas funciones base bien localizadas en tiempo y en frecuencia.

Así, la TW está dada por[3]:

$$(T^{wav}x)(a,b) = |a|^{-1/2} \int x(t)\psi(\frac{t-b}{a})dt \qquad (13)$$

y para el caso discreto [3]:

$$T^{wav}_{m,n}(x) = |a_0|^{-1/2} \int x(t)\psi(a_0^{-m}t - nb_0)dt \qquad (14)$$

donde ψ siempre satisface

$$\int \psi(t)dt = 0. \qquad (15)$$

Similitudes entre la TW y la STFT

La similitud entre la TW y la STFT está en que en ambas se toma el producto interior de $x(t)$ con una familia de funciones indexadas por dos etiquetas

$$w(\omega,t) = e^{j\omega u}w(u-t), \text{ y}$$
$$\psi^{a,b}(u) = |a|^{-1/2}\psi(\frac{u-b}{a}). \qquad (16)$$

Las funciones $\psi^{a,b}$ son llamadas "*wavelets*", y la función ψ es llamada la wavelet madre. El término *wavelet* en español no se ha estandarizado todavía, así que se le puede encontrar como "ondícula" o bien como "ondeleta" en algunos pocos casos.

Una selección para ψ es

$$\psi(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2}, \qquad (17)$$

es decir, la segunda derivada de una Gaussiana, conocida como el "sombrero mexicano." Esta función está bien localizada en tiempo y frecuencia y satisface el requisito (15). En tanto cambia a, la función $\psi^{a,0}(u) = |a|^{-1/2}\psi(u/a)$ cubre diferentes rangos de frecuencia, o escalas. Cambiando el parámetro b también permite mover el centro de localización en el tiempo. Cada $\psi^{a,0}(u)$ está localizada alrededor de $u = b$.

Diferencias entre la TW y la STFT

La diferencia entre la TW y la STFT está en la forma de las funciones de análisis $w(f,t)$ y $\psi^{a,b}$. Mientras que en las $w(f,t)$ todas consisten de la misma forma envolvente, por ejemplo la Gaussiana trasladada a una localización de tiempo apropiado y sin importar el valor de f tienen el mismo ancho, las $\psi^{a,b}$, por el contrario, tienen ancho de tiempo adaptado a su frecuencia. Las $\psi^{a,b}$ de alta frecuencia son muy estrechas, mientras que las $\psi^{a,b}$ de baja frecuencia son más amplias. De todo esto se obtiene que la TW es mejor para observar fenómenos de corta duración y alta frecuencia tales como señales transitorias.

Algunas funciones de análisis para la TW se muestran en la Figura 7.

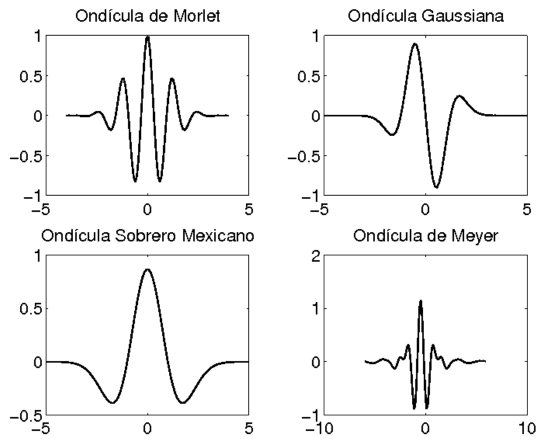

Figura 7. Algunas ondículas usadas en la TW.

Algunos resultados

En esta sección se muestran algunos resultados del análisis de señales no estacionarias. Los datos corresponden al registro de manchas solares desde 1748 hasta 1996 [5] y se utilizó el código en MATLAB©de [4]. En la Figura 8 se muestra el espectro de estos datos obtenido por la transformada de Fourier. Puede observarse que se trata de una señal de baja frecuencia. Una representación tiempo-frecuencia se muestra en la Figura 9, donde nuevamente se ve que las oscilaciones dominantes se encuentran a frecuencias bajas. Para mostrar la utilidad de la TW, en la Figura 10 se muestra la TW de los datos, donde se pueden apreciar muchos más detalles acerca del contenido de frecuencias de dicha señal. Comparando estos resultados, en la TW se aprecia que efectivamente hay un importante componente de baja frecuencia (periodo largo), pero al mismo tiempo se observan con más detalle algunos componentes de alta frecuencia que difícilmente se pueden apreciar en la transformada de Fourier o en la STFT.

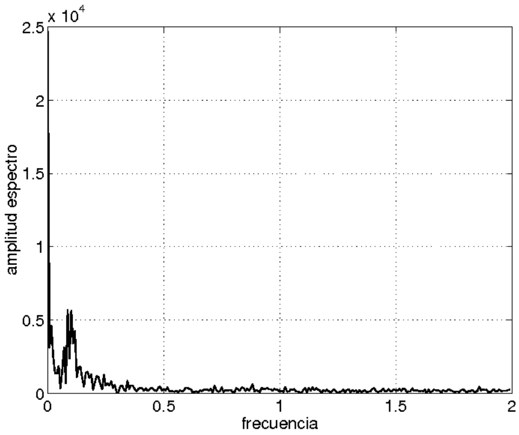

Figura 8. Espectro del registro de manchas solares por transformada de Fourier.

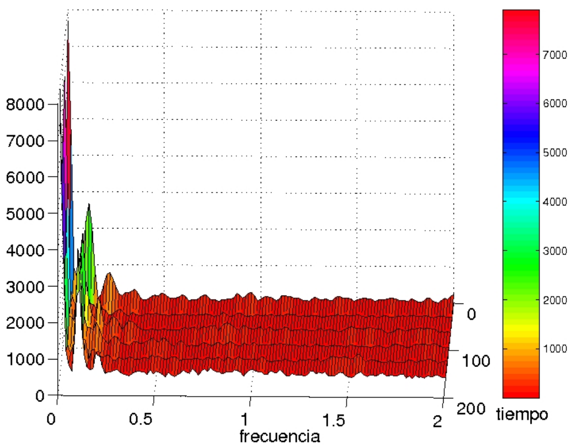

Figura 9. Espectrograma de las manchas solares en perspectiva.

Conclusiones

La Transformada en Ondículas o Transformada Wavelet, es una herramienta que analiza las diferentes componentes de frecuencia con una resolución adaptada a su escala. La TW depende de dos variables, la escala y el tiempo, y el resultado es una localización tiempo-frecuencia de una señal que evoluciona en el tiempo.

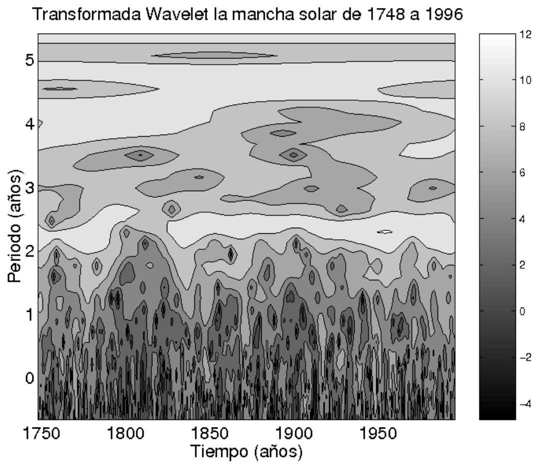

Figura 10. Transformada Wavelet de las manchas solares.

En este trabajo se han presentado las razones principales del por qué de la TW y se han mostrado algunos ejemplos comparando el resultado con el análisis basado en la transformada de Fourier y en la STFT.

Reconocimientos

Uno de los autores desea agradecer al Programa de Mejoramiento al Profesorado (PROMEP) de la Secretaria de Educación Pública (SEP) de México, por el apoyo bajo registro UAZAC PTC 24-103.5/03/1127.

Bibliografía

[1] François. Auger, Patrick Flandrin, Paulo Gonçalves, Olivier Lemoine, *Time-Frequency Toolbox for use with Matlab*, CNRS and Rice University pp. 20 (1995-1996).

[2] James H. McClellan, Ronal W. Schafer, Mark A. Yoder, *DSP FIRST a multimedia approach*, Prentice Hall pp. 72 (1998).

[3] Ingrid Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM 1994.

[4] Christopher Torrence and Gilbert P. Compo, *Practical Guide to Wavelet Analysis*, Bulletin of the American Meteorological Society, Vol. 79, No. 1 (1998).

[5] *Wolf's Sunspot Number* source:National Geophysical Data Center disponible en http://web.ngdc.noaa.gov/stp/SOLAR/solar.html

Acerca del autor o autores

Los autores son profesores de la Facultad de ingeniería eléctrica de laUniversidad Autónoma de Zacatecas, López Verlarde 801, Centro. Zacatecas Zac. 98000, México TEL: +(492)9239407, correo-e: gmiram2002@yahoo.com