



# Ridgelets y Curvelets: Una Nueva Alternativa a la Transformada en Ondículas

J. Ismael De la Rosa, J. Jesús. Villa, Gerardo Miramontes, Ma. Auxiliadora. Araiza, Claudia Sifuentes, y Ernesto García

## *Ridgelets and Curvelets: A new alternative to wavelets transform*

Recibido: agosto 17, 2010

Aceptado: septiembre 15, 2010

Palabras clave: Ondículas; ridgelets; curvelets

### **Abstract:**

*We present a new set of tools used for signal compression and restoration. Curvelets and Ridgelets transforms represent a new alternative to the wavelet transform for compression and restoration of n-dimensional signals. Analysis by the wavelet Transform (WT) has grown thanks to its applicability in different areas. Some areas of application are signal restoration, signal compression, and coding, and more specifically in the case of images. WT however does not give good results in two-dimensional signals, as in the case of images when they present discontinuities. This is where the new transformations arise. These new transformations are known as Ridgelets and Curvelets.*

**Keywords** Wavelets; ridgelets; curvelets

**L**AS transformadas Ridgelet y Curvelet son dos alternativas recientes utilizadas para las representaciones de sistemas multiescala. Se pueden emplear tanto para filtrado de señales como para la compresión. La transformada ridgelet fue introducida en el trabajo de tesis de E. Candès en 1998 [3] bajo la supervisión de D. Donoho. Dicha transformada fue introducida como una expansión de funciones esparcidas en espacios continuos que son lo suficientemente regulares (*smoothness condition*), lo cual permite alejarse de posibles discontinuidades [4], [6], [10]. La transformada ridgelet discreta se obtiene para señales de tamaño finito y tiene un vínculo especial con la transformada de Radon finita (FRAT) [15].

En el caso del procesamiento de imágenes, muchas de las tareas aprovechan representaciones esparcidas de los datos en donde se desea empaquetar un máximo de información en un mínimo de muestras. La elección más actual es la utilización de la transformada en ondículas o *wavelets*. El éxito en la utilización de bases en ondículas se debe a que es posible alcanzar grandes desempeños utilizando funciones regulares por segmentos o “tomos”, y sobre todo para casos de señales unidimensionales [14]. En el caso bidimensional, existen mayores restricciones debido a la existencia de sin-

gularidades (las regiones de regularidad están separadas por contornos) y hay que hacer manipulaciones para poder llevar a cabo la obtención de ondículas bidimensionales o  $n$ -dimensionales que permitan estabilidad a la transformación. Una alternativa a la debilidad de las ondículas antes mencionada es la utilización de una representación llamada *ridgelets* que trata de manera más efectiva las singularidades que se presentan en dos dimensiones (2-D). La idea principal es “mapear” las líneas de singularidades en singularidades puntuales utilizando para ello la transformada de Radon. Enseguida, se aplica la transformada en ondículas (unidimensional) la cual puede manipular de forma eficaz las singularidades puntuales que se encuentran en el dominio de Radon. La propuesta inicial se plasma en forma continua para funciones definidas en  $L^2(\mathbf{R})$ .

En lo que se refiere a la transformada *Curvelet* [4], [5], [7], [8], [16] y [17], ésta es aún más reciente y también es de gran utilidad en el análisis multiresolución (Análisis multiresolución y análisis geométrico de forma simultánea). La ventaja de ésta sobre la transformada en ondículas, es que se pueden representar de mejor manera los objetos con contornos (discontinuidades bidimensionales). El error de representación cuadrático requiere al menos  $\frac{1}{N}$  ondículas, mientras que, para un mismo error, sólo son necesarias  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  curvelets. Esta transformada tiene muchas similitudes con la transformada en ondículas, pero también tiene algunas diferencias, entre ellas se encuentra un escalamiento anisotrópico (el de las ondículas es isotrópico). La transformada curvelet se basa en la construcción de marcos estrechos (*tight frames*), que obedecen una ley o regla especial de escalamiento, en donde la longitud del soporte de los marcos y el ancho del mismo soporte se relacionan de la siguiente forma: ancho  $\approx$  (longitud)<sup>2</sup>. Su base está compuesta por diferentes etapas, y en éstas interviene el uso de ridgelets (monoescala y multiescala).

## Transformadas Ridgelet y Curvelet

### Transformada Ridgelet

**Transformada ridgelet continua [3]:** Dada una función bivariable  $f(x)$  e integrable, su transformada ridgelet continua (*Continuous ridgelet transform* - CRT) en el espacio bidimensional  $x \in \mathbf{R}^2$ , está definida por (ecuación de análisis):

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_{\mathbf{R}^2} \Psi_{a,b,\theta}(x) f(x) dx, \quad (1)$$

en donde  $\theta$  indica el ángulo según la posición radial de un punto  $x : (x_1, x_2)$  en el espacio  $\mathbf{R}^2$  y las ridgelets  $\Psi_{a,b,\theta}(x)$  en dos dimensiones se definen a partir de una función de tipo ondícula  $\Psi(x)$  de una dimensión de la siguiente forma:

$$\Psi_{a,b,\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi \left( \frac{x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - b}{a} \right). \quad (2)$$

Puede compararse con la transformada bidimensional en ondículas separable, la cual está dada por:

$$W_f(a_1, a_2; b_1, b_2) = \int_{\mathbf{R}^2} \Psi_{a_1, a_2; b_1, b_2}(x) f(x) dx, \quad (3)$$

en donde las ondículas bidimensionales se forman a partir de un producto tensorial

$$\Psi_{a_1, a_2; b_1, b_2}(x) = \Psi_{a_1, b_1}(x_1) \Psi_{a_2, b_2}(x_2), \quad (4)$$

de ondículas unidimensionales,

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi \left( \frac{t-b}{a} \right). \quad (5)$$

Ambas transformadas son similares, pero los parámetros puntuales  $b_1$  y  $b_2$  se intercambian por los parámetros de línea  $b$  y  $\theta$ . Las dos transformadas multiescala se relacionan según los siguientes argumentos:

Ondículas :  $\Psi_{\text{escala, posición puntual}}$

Ridgelets :  $\Psi_{\text{escala, posición lineal}}$

Ondículas : Eficientes para modelar objetos con singularidades puntuales aisladas.

Ridgelets : Eficientes para modelar objetos con singularidades a lo largo de una línea.

En forma general, se puede considerar que las ridgelets representan una concatenación de ondículas unidimensionales a lo largo de las líneas o contornos de objetos. En un espacio bidimensional, los puntos y las líneas se relacionan mediante una transformación de Radon, por lo que la transformada en ondículas y la transformada ridgelet se relacionan mediante la misma transformación, la cual está dada por:

$$R_f(\theta, t) = \int_{\mathbf{R}^2} f(x) \delta(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - t) dx, \quad (6)$$

y entonces,

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_{\mathbf{R}} \Psi_{a,b}(t) R_f(\theta, t) dt. \quad (7)$$

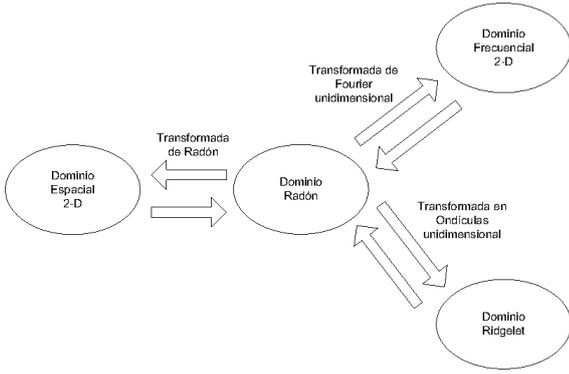


Figura 1. Relación entre los diferentes dominios.

La Figura 1 muestra los mapeos que se llevan a cabo entre los diferentes dominios: dominio frecuencial, dominio espacial, dominio de Radon y el dominio ridgelet.

Finalmente, la ecuación de síntesis ridgelet continua está dada partiendo de la siguiente expresión:

$$\int |f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\text{CRT}_f(a, b, \theta)|^2 \frac{da}{a^3} db \frac{d\theta}{4\pi}, \quad (8)$$

entonces

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \text{CRT}_f(a, b, \theta) \psi_{a,b,\theta}(x) \frac{da}{a^3} db \frac{d\theta}{4\pi}, \quad (9)$$

que se puede generalizar para  $n$ -dimensiones.

**Transformada ridgelet discreta [6], [10], [15]:** Para poder llevar a cabo la transformada ridgelet discreta (*Discrete ridgelet transform - DRT*), primero es necesario definir la transformada de Radon discreta (*Discrete Radon transform - DRAT*) que bien puede ser aproximada por la transformada de Radon finita (*Finite Radon Transform - FRAT*) como lo muestra Minh Do [15], pues la DRT puede ser construida en base a la transformada discreta de Radon. La transformada de Radon finita, es una versión invertible de la Transformada de Radon en tiempo discreto y bajo la suposición de periodicidad esta funciona sin ningún problema. La FRAT de una función  $f$  de dimensión 2 y finita en  $\mathbf{Z}_p^2$  se define como:

$$r_k[l] = \text{FRAT}_f(k, l) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{(i,j) \in L_{k,l}} f[i, j], \quad (10)$$

en donde  $L_{k,l}$  denota el conjunto de puntos que forman parte de la línea que se encuentra en  $\mathbf{Z}_p^2$ , esto es:

$$L_{k,l} = \{(i, j) : j = ki + l \pmod{p}, i \in \mathbf{Z}_p\}, \text{ para } 0 \leq k < p,$$

$$L_{p,l} = \{(l, j) : j \in \mathbf{Z}_p\}.$$

La inversa de la transformación se denomina retro-proyección o proyección finita hacia atrás (*finite back projection - FBP*) y se define por la suma de los coeficientes de Radon de todas las líneas que convergieron a un mismo punto, esto es

$$\begin{aligned} f[i, j] &= \text{FBP}_r(i, j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{(k,l) \in P_{i,j}} r_k[l], \end{aligned} \quad (11)$$

en donde  $P_{i,j}$  indica el conjunto de índices de todas las líneas que van hacia el punto  $(i, j) \in \mathbf{Z}_p^2$ , es decir:

$$P_{i,j} = \{(k, l) : l = j - ki \pmod{p}, k \in \mathbf{Z}_p\} \cup \{(k, l)\}.$$

Es muy importante tratar de buscar un orden óptimo para  $r_k[l]$  pues de ello dependerá el buen desempeño de la FRAT. Partiendo de la FRAT, se puede entonces construir la transformada ridgelet finita (FRIT) como se muestra en la Figura 2.

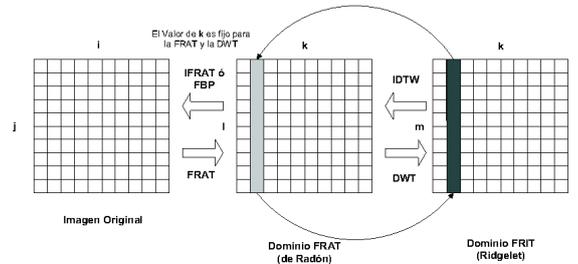


Figura 2. Relación entre los dominios espacial, FRAT y FRIT.

Adicionalmente, si se respeta la condición para la conformación de marcos (*frames*) tanto para la transformada discreta de Radon, como para la transformada en ondículas, entonces aseguramos estabilidad para llevar a cabo la transformada ridgelet discreta y la inversa de esta última (se puede llevar a cabo la expansión en bases ortonormales: diádicas, symlets, etc.).

Entonces los parámetros  $a$  y  $b$  pueden ser discretizados como:  $a_j = a_0 2^j$  y  $b_{j,k} = 2\pi k 2^j$ . Viendo la transformada ridgelet en el plano frecuencial (de Fourier) tenemos:

$$\text{CRT}_f(a_j, b_{j,k}, \theta) = \frac{2^{-j}}{2\pi} \int_{2^j \leq |\lambda| \leq 2^{j+1}} e^{-i\lambda 2\pi 2^j} \widehat{f}(\xi(\lambda, \theta)) d\lambda \quad (12)$$

en donde  $\widehat{f}(\cdot)$  es la transformada de Fourier 2-D de  $f(x)$  puesto que:

$$\text{CRT}_f(a, b, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\Psi}(a\lambda) e^{-i\lambda b} \widehat{f}(\xi(\lambda, \theta)) d\lambda \quad (13)$$

y  $\xi(\lambda, \theta) = (\lambda \cos(\theta), \lambda \sin(\theta))$ , y se puede definir también,

$$w_{a,b}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\Psi}(a|\xi|) \exp(-i\lambda b). \quad (14)$$

Si además,  $\theta_{j,l} = 2\pi l 2^{-j}$ , entonces se puede obtener una condición de marco completa tal que se tiene la siguiente familia o colección de ridgelets,

$$\{2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j(x_1 \cos(\theta_{j,l}) + x_2 \sin(\theta_{j,l}) - 2\pi k 2^{-j}))\} \quad (15)$$

para  $j \geq j_0, l, k$  y se encuentra en un disco unitario.

Al igual que la transformada en ondículas, la existencia de los límites  $A$  y  $B$  implica que se puede obtener un análisis/síntesis mediante ridgelets duales  $\widehat{\Psi}_{j,k,l}$ ,

$$f = \sum_{j,k,l} \langle f, \widehat{\Psi}_{j,k,l} \rangle \Psi_{j,k,l}, \quad (16)$$

en donde se pueden utilizar familias de ondículas diádicas, de Meyer, etc., adicionalmente se pueden construir diccionarios de ridgelets basados en las familias de ondículas antes mencionadas. Por otro lado, y al igual que en el análisis con ondículas, también se puede hacer uso de paquetes de ridgelets (*ridgelet packets*) con la finalidad de mejorar los desempeños de los esquemas de análisis/síntesis [12]. O bien se puede optar por esquemas de análisis multi-nivel ridgelet, como el propuesto por Minh Do (FRIT Multilevel) [15].

## Transformada Curvelet

**Transformada curvelet continua [5], [7], [16]:** La transformada curvelet (TCvC) es una transformada muy reciente

y es de gran utilidad en el análisis multiresolución, está inspirada en una evolución de las ideas que dieron base a la transformada ridgelet. La ventaja de la TCvC sobre la transformada en ondículas, es que se pueden representar de mejor manera los objetos con contornos curvilíneos (discontinuidades bidimensionales). El error cuadrático de representación requiere de al menos  $\frac{1}{N}$  ondículas, mientras que sólo se necesitan para un mismo error  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  curvelets. La transformada curvelet se basa en la construcción de marcos estrechos que obedecen la regla: ancho  $\approx$  (longitud)<sup>2</sup>. Esta nueva transformada equivale a llevar a cabo al mismo tiempo dos análisis: análisis multiresolución y un análisis geométrico. La transformada curvelet continua (TCvC) se define a partir de lo siguiente: sea  $M'$  una colección de  $M$  subconjuntos en donde se encuentran incluidos los parámetros de indexado  $(k_1, k_2)$  y que corresponden a etapas de integración. La transformada curvelet es un mapeo  $L^2(\mathbf{R}^2) \rightarrow l^2(M')$ , en donde se obtiene coeficientes curvelet  $(\alpha_\mu : \mu \in M')$ . Existen dos tipos de coeficientes:

- I) Para escalas grandes se tienen coeficientes basados en una ondícula de escalamiento

$$\alpha_\mu = \langle \phi_{k_1, k_2}, P_0 f \rangle, \quad \mu = (k_1, k_2) \in M' / M, \quad (17)$$

en donde  $\phi_{k_1, k_2}$  es una función de escalamiento de Lamari que proporciona bases de Meyer, y  $P_0$  es un filtro pasa-bajas.

- II) Para escalas finas se tienen coeficientes ridgelet multiescala que se obtienen después de un filtrado pasa-banda (filtrado en sub-bandas),

$$\alpha_\mu = \langle \Delta_s f, \Psi_\mu \rangle, \quad \mu \in M_s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (18)$$

en donde  $\Delta_s f = \Psi_{2^s} * f$  y  $\Psi_{2^s} = 2^{4s} \Psi(2^{2s})$ ,  $\Delta_s$  son filtros sub-banda. Cada coeficiente está asociado a la escala  $2^{-s}$ , lo cual significa que se obtiene una versión filtrada en sub-bandas de  $f$ , es decir  $\Delta_s f$  y los coeficientes no se obtienen directamente de  $f$ .

De lo anterior se deducen las siguientes propiedades:

- Un marco estrecho puede obtenerse si

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\mu \in M'} |\alpha_\mu|^2. \quad (19)$$

- Si existen marcos apropiados, entonces existen coeficientes representativos

$$\alpha_\mu = \langle f, \gamma_\mu \rangle \quad (20)$$

en donde  $\gamma_\mu \in L^2(\mathbf{R}^2)$  es un marco estrecho.

- También existe la transformada inversa, tal que

$$f = \sum_{\mu \in M'} \langle f, \gamma_\mu \rangle \gamma_\mu. \quad (21)$$

- Y, por fórmula, los marcos estrechos están definidos por:

$$\gamma_\mu = \Delta_s \psi_\mu, \quad \mu \in Q_s, \quad (22)$$

en donde  $Q_s$  es el conjunto de  $Q = (s, k_1, k_2)$  que tienen la forma diádica siguiente:  $Q = [k_1/2^s, (k_1 + 1)/2^s) \times [k_2/2^s, (k_2 + 1)/2^s)$ , tal que  $\mu = (Q, \lambda)$  y  $\psi_\mu = 2^s T_Q(w, \rho_\lambda)$ , esta última hace referencia a ridgelets multiescala y ortonormales. Entonces, las curvelets se obtienen mediante el filtrado pasa-banda de ridgelets multiescala en donde la banda de paso está relacionada estrechamente con la escala de la localización espacial.

La ley de *anisotropía* en la escala está dada de la siguiente forma: El filtro pasa-banda  $|\xi| \approx 2^{2s}$  y la escala espacial es  $2^{-s}$ , esto impone que muchas ridgelets multiescala no sobrevivirán durante el filtrado pasa-banda y entonces la longitud de las curvelets es longitud  $\approx 2^{-s}$  y el ancho es ancho  $\approx 2^{-2s}$  por lo que se tiene la relación ancho  $\approx (\text{longitud})^2$ .

**Transformada curvelet discreta [4], [9], [16], [17]:** Al igual que la DRT, la transformada curvelet discreta (TCvD) también conocida como transformada curvelet digital (Digital Curvelet Transform-DCvT) es complicada de obtener debido a sus condicionantes y a la falta de más trabajo que permita establecer algoritmos contundentes, en este sentido parece aún haber un camino por recorrer dentro de la investigación acerca de estas nuevas herramientas.

Para llevar a cabo la TCvD es necesario definir los procedimientos a seguir para efectos de análisis y también de síntesis.

**Análisis (puntos importantes):**

- Descomposición en subbandas,

$$f \mapsto (P_0 f, \Delta_1 f, \Delta_2 f, \dots), \quad \Delta_s, s \geq 0.$$

en donde hay detalles sobre un ancho de  $2^{-2s}$ .

- Particionamiento de regiones regulares: ventanas cuadradas  $w_Q$  localizadas según  $Q$ ,

$$\Delta_s f \longrightarrow (w_Q \Delta_s f)_{Q \in Q_s}.$$

- Renormalización: cada ventana cuadrada es renormalizada a una escala unitaria,

$$T_Q f(x_1, x_2) = 2^s f(2^s x_1 - k_1, 2^s x_2 - k_2),$$

en donde  $T_Q$  es el operador que transporta y renormaliza a  $f$ . Entonces, la renormalización se completa por,

$$g_Q = (T_Q)^{-1}(w_Q \Delta_s f), \quad Q \in Q_s.$$

- Análisis ridgelet: cada cuadro es analizado por un sistema ridgelet ortonormal con elementos base  $\rho_\lambda \in L^2(\mathbf{R}^2)$ ,

$$\alpha_\mu = \langle g_Q, \rho_\lambda \rangle, \quad \mu = (Q, \lambda).$$

En la Figura 3 se muestra un diagrama en donde se muestra gráficamente el proceso descrito en los puntos anteriores.

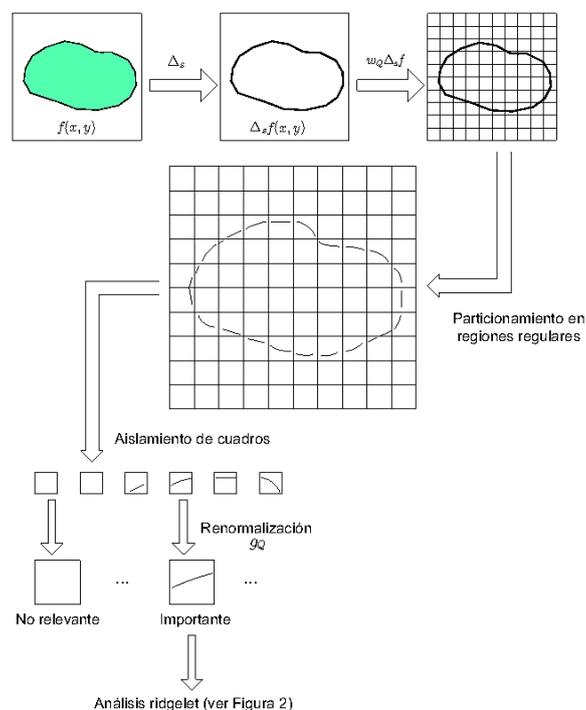


Figura 3. Pasos a seguir para el análisis curvelet (Descomposición en una subbanda).

Síntesis (puntos importantes):

- Síntesis ridgelet: cada cuadro es reconstruido,

$$g_Q = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda, Q} \rho_{\lambda}.$$

- Renormalización: cada cuadro resultante del proceso anterior es renormalizado,

$$h_Q = T_Q g_Q, \quad Q \in Q_s.$$

- Integración en regiones regulares: se revierte el proceso de ventaneo, reconstruyendo

$$\Delta_s f = \sum_{Q \in Q_s} w_Q \cdot h_Q.$$

- Recomposición de las subbandas: Reconstrucción o síntesis del filtrado subbanda, según la fórmula

$$f = P_0(P_0 f) + \sum_{s>0} \Delta_s(\Delta_s f).$$

El cual es el proceso inverso al mostrado en la Figura 3.

La idea principal de la transformada curvelet es, entonces, primero descomponer la imagen en subbandas con el propósito de separar el objeto en una serie de escalas disjuntas. Cada escala es analizada de forma local por la transformada ridgelet. Entonces, los diferentes niveles de la pirámide ridgelet multiescala se utilizan para representar diferentes sub-bandas de un banco de filtros de salida. El punto clave está en la existencia de una relación muy especial entre la profundidad de la pirámide multi-escala y los índices de las sub-bandas diádicas, manteniendo la propiedad fundamental de la transformada curvelet en donde los elementos de longitud de  $2^{-j/2}$  sirven para el análisis y la síntesis de la  $j$ -sima subbanda  $[2^j, 2^{j+1}]$ .

El algoritmo de filtrado en sub-bandas propuesto por Mallat [14] (*the "trous" algorithm*) tiene una estructura óptima para ser utilizado en la transformada curvelet discreta según lo manifiesta Starck [17], dicho algoritmo lleva a cabo una descomposición descrita por la siguiente ecuación:

$$I(x_1, x_2) = c_J(x_1, x_2) + \sum_{j=1}^J w_j(x_1, x_2), \quad (23)$$

en donde  $c_J$  es una versión suavizada de la imagen original  $I$  y  $w_j$  representa los detalles de  $I$  a escalas  $2^{-j}$ . El algoritmo tiene como salidas  $J + 1$  arreglos de sub-bandas de dimensión  $n \times n$ , para el cual  $j = 1$  corresponde a la escala más fina (altas frecuencias).

## Combinación de algoritmos

En trabajos presentados por Candès [4] y Starck [16], [17], se recomienda sacar ventaja de los puntos fuertes tanto de la transformada curvelet (modelado adecuado de discontinuidades de longitud relativamente grande) como de la transformada wavelet (modelado adecuado de discontinuidades de longitud relativamente pequeña), de tal modo que se sugiere la construcción de algoritmos híbridos, que permitirán aumentar la relación señal a ruido en potencia (PSNR) y la calidad visual de las imágenes reconstruidas, utilizando para ello esquemas iterativos y en donde se proponen criterios a ser minimizados basados en normas de tipo  $L_1$  o de variación total (e.g. *total variation norm*).

## Algunos resultados reportados

En esta sección se describen algunos de los resultados reportados por Candès [4] y Starck [17] con el objetivo de explicar el por qué de nuestro interés en abordar y utilizar estas nuevas transformadas en el procesamiento de imágenes. En la Figura 4 se presentan algunos resultados de reconstrucción de una imagen que contiene una señal bidimensional caracterizada por una Gaussiana mutilada, en donde los tonos de grises cambian abruptamente (discontinuidad) por un fondo negro. La reconstrucción se lleva a cabo utilizando tres esquemas, b) transformada en ondículas o wavelets con un umbral óptimo (en donde se retienen únicamente 100 coeficientes), c) transformada ridgelet, y d) transformada ridgelet utilizando un minimizador basado en la norma de variación total. Se puede ver que la calidad visual de cada reconstrucción es diferente y la mejor es sin duda la del inciso c) pues se aproxima de mejor forma a la imagen original mostrada en el inciso a).

En el caso de la Figura 5, se presentan resultados visuales aplicando la transformada curvelet a una imagen clásica de referencia (Barbara), en este caso se trata de eliminar (filtrar) el ruido Gaussiano de la imagen preservando los contornos de la mejor manera. En el inciso c) de la figura se aprecia la reconstrucción utilizando solamente la transformada curvelet, y en el inciso d) transformada curvelet utilizando un minimizador basado en la norma de variación total. La calidad visual de cada reconstrucción es diferente y la mejor es sin duda la del inciso d) pues se aproxima más a la imagen original. Por otro lado, en la Figura 6 se presentan resultados de filtrado de otra imagen clásica (Lena),

en donde ahora la propuesta es mejorar el desempeño de la transformada curvelet utilizando en conjunto curvelets y wavelets, la imagen superior izquierda contiene ruido Gaussiano, la imagen del lado superior derecho es una versión filtrada de la imagen de Lena usando la transformada wavelet sin diezmar, la imagen inferior izquierda es una versión filtrada de la imagen de Lena usando la transformada curvelet y finalmente la imagen inferior derecha muestra una versión filtrada de la imagen de Lena utilizando curvelets y wavelets a la vez.

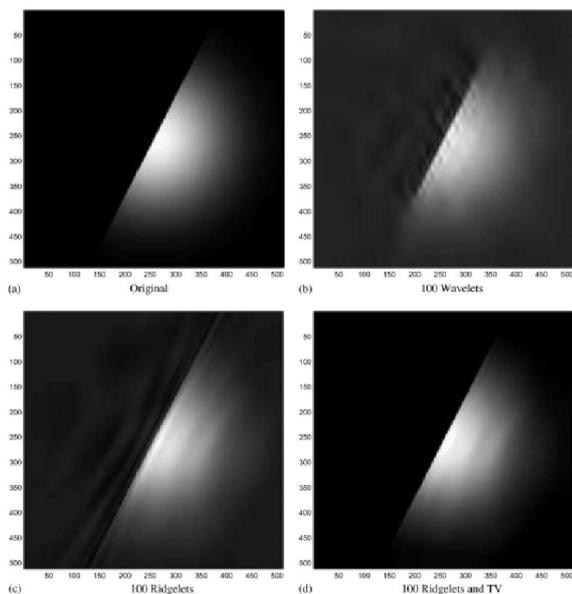


Figura 4. Efecto de las ondículas comparado con el uso de ridgelets y variación total (TV) (Figura tomada del trabajo de Candés, y Guo [4]).

## Comentarios y trabajo futuro

Dos líneas de interés en el laboratorio de procesamiento digital de señales y enmarcadas en el área de procesamiento de imágenes son: la codificación de hologramas, tal es el caso de los trabajos de investigación de Ma. A. Araiza [1], [2], en donde las tareas de codificación podrán llevarse a cabo mediante el uso de las nuevas teorías fundamentadas en las wavelets tal y como se plantea en [13], buscando así la aplicación de las nuevas transformadas de señales  $n$ -dimensionales. Por otro lado, también existen aplicaciones en instrumentación óptica, en donde es necesario llevar a cabo el análisis de imágenes con patrones de franjas, como



Figura 5. Restauración usando curvelets y variación total (TV) (Figura tomada del trabajo de Candés, y Guo [4]).

en el caso de los trabajos de J. Villa [18] y [19], y para este caso estamos interesados en cuanto al modelado utilizando wavelets, ridgelets, y curvelets. De acuerdo a los resultados reportados en la literatura (ver la sección anterior), se establecen las siguientes conjeturas:

1. Las nuevas transformadas son susceptibles de aportar nuevas metodologías para la codificación de hologramas, y
2. Éstas también pueden aplicarse en la restauración de imágenes con patrones de franjas (ver Figura 7) para estimar algunas medidas de interés en instrumentación óptica, tales como el seguimiento de fase, la perfilometría para estimar las dimensiones de objetos en tres dimensiones, etc.

## Reconocimientos

J. I. de la Rosa desea agradecer al Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) de la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México, este trabajo fue parcialmente apoyado por PROMEP-SEP bajo registro UAZAC PTC 24-103.5/03/1127.

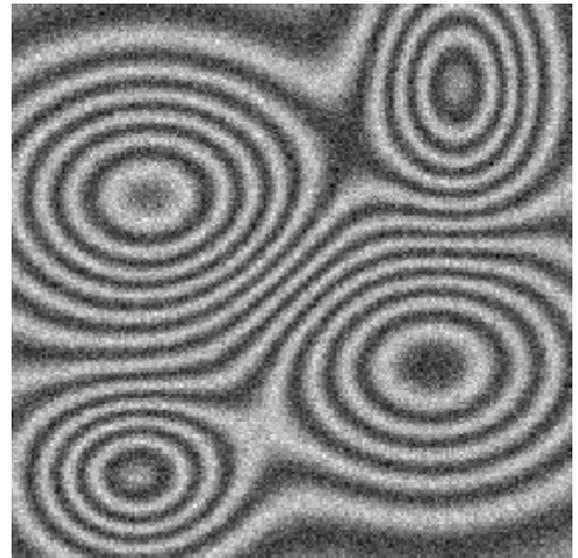


Figura 6. Restauración usando curvelets y wavelets (Figura tomada del trabajo de Starck, Donoho y Candès [17]).

Figura 7. Imagen simulada con patrones de franjas y ruido.

## Bibliografía

- [1] Araiza, M., y Guel, S., “Two-channel computer-generated holograms: a simplified method,” *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 39, pp. 629–634, (2003).
- [2] Araiza, M., Guel, S., y Ojeda, J. “Multichannel image storage with image processing capabilities”, *Opt. Comm.*, Vol 230, pp. 131–135, (2004).
- [3] Candès, E. J., *Ridgelets: Theory and Applications*, Ph.D. Thesis, Department of Statistics, Stanford University, (1998).
- [4] Candès, E. J., y Guo, F., “New multiscale transforms, minimum total variation synthesis: Applications to edge-preserving image reconstruction”, *Journal of Signal Processing*, Vol. 82, pp. 1519–1543, Jan. (2002).
- [5] Candès, E. J., y Donoho, D. L., “Curvelets: A surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges”, in *Curves and Surfaces Fitting*, L. L. Schumaker, A. Cohen, and C. Rabut, Eds. Vandervilt University Press, Nashville, TN, pp. 105–120, (2000).
- [6] Candès, E. J., y Donoho, D. L., “Ridgelets: A key to higher-dimensional intermittency?”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, Vol. A 357, pp. 2495–2509, (1999).
- [7] Candès, E. J., y Donoho, D. L., “Curvelets and Curvilinear Integrals”, *Journal of Approx. Theory*, Vol. 113, pp. 59–90, (2000).
- [8] Candès, E. J., y Donoho, D. L., “New Thigt Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Smooth  $C^2$  Singularities”, *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. 57, pp. 219–266, (2004).
- [9] Donoho, D. L., y Duncan, M. R., “Digital Curvelet Transform: Strategy, Implementation and Experiments”, in *Proc. Aerosense 2000, Wavelet Applications VII*, SPIE, Vol. 4056, pp. 12–29, (2000).
- [10] Donoho, D. L., y Flesia, A. G., “Digital Ridgelet Transform based on true Ridge Functions”, Technical Report, Stanford University, (2001).
- [11] Donoho, D. L., y Huo, X., “Beamlets and Multi-scale Image Analysis”, *Multiscaleñand Multiresolution Methods*, Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering (Editors T.J. Barth, T. Chan, and R. Haimes), Vol. 20, pp. 149–196, (2002).
- [12] Flesia, A. G., Hel-Or, H., Averbuch, A., Candès, E. J., Coifman, R. R., y Donoho, D. L., “Digital Implemen-

- tation of Ridgelet Packets”, Technical Report, Stanford University, (2002).
- [13] García, J., Zalevsky, Z., y Mendlovic, D., “Two-dimensional wavelet transform by wavelength multiplexing”, *Applied Optics*, Vol. 35, No. 35, pp. 7019–7024, Dec. (1996).
- [14] Mallat, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, Second Edition, (1999).
- [15] Do, M. N., y Vetterli, M., “The Finite Ridgelet Transform for Image Representation”, *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 12, pp. 16–28, Jan. (2003).
- [16] Starck, J. L., Candès, E. J., y Donoho, D. L., “The Curvelet Transform for Image Denoising”, *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 11, pp. 670–684, Jun. (2002).
- [17] Starck, J. L., Donoho, D. L., y Candès, E. J., “Very High Quality Image Restoration by Combining Wavelets and Curvelets”, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing IX*, A. Aldroubi, A. F. Laine, M. A. Unser eds., Proc. SPIE Vol. 4478, (2001).
- [18] Villa, J., Servín, M., y Castillo, L., “Profilometry for the measurement of 3-D object shapes based on regularized filters”, *Opt. Comm.*, Vol. 161, pp. 13–18, (1999).
- [19] Villa, J., De la Rosa, J. I., Miramontes, G., y Quiroga, J. A., “Phase recovery from a single fringe pattern using an orientational vector field regularized estimator”, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 22, No. 12, pp. 2766–2773, Dec. (2005).

## Acerca del autor o autores

Los autores son profesores adscritos al Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales, U. A. de Ingeniería Eléctrica, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas ZAC-98000. TEL: +(492)9239407, ext. 169 correo-e: [ismaelrv@ieee.org](mailto:ismaelrv@ieee.org)