

Filtrado de Imágenes utilizando la DFT-2D

Francisco R. Castillo Soria^a, Gustavo Fernández Torres^b, Abel García Barrientos^a, Enrique Stevens Navarro^a, Víktor Iván Rodríguez Abdalá^c

^aUniversidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP),
Facultad de Ciencias, Campus Zona Universitaria.
Lateral Av. Salvador Nava Martínez S/N. CP 78290. Col. Lomas. San Luis Potosí, Mexico.
ruben.soria@uaslp.mx

^bUniversidad Nacional Autónoma de México (UNAM),
Facultad de Estudios Superiores (FES) Aragón, Departamento de Ingeniería Civil.
Avenida Rancho Seco s/n, 57130 Nezahualcóyotl, México.
gusfer@comunidad.unam.mx

^cUniversidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica,
Centro de Investigación, Innovación y Desarrollo en Telecomunicaciones
Av. López Velarde 801, Col. Centro, Zacatecas, Zac., México, 98000.
abdala@uaz.edu.mx

2018 Published by DIFU_{100ci}@ <http://difu100cia.uaz.edu.mx>

Resumen

La transformada de Fourier es una herramienta ampliamente usada para el procesamiento de imágenes y video. Cuando se requiere filtrar una señal, la transformada de Fourier ofrece una solución eficiente y rápida en comparación con el filtrado por convolución de alto orden. En este artículo se presenta una descripción teórica de la DFT-2D así como su aplicación al filtrado de imágenes. Los filtros utilizados son el pasa bajas, pasa altas y el rechaza banda. Como resultado se observan los efectos del filtrado sobre la imagen. Estos efectos son el suavizado, detección de bordes y eliminación de ruido respectivamente.

Palabras clave: DFT-2D, filtrado de Fourier, procesamiento de imágenes.

1. Introducción

El desarrollo matemático de la transformada de Fourier fue explicado por primera vez por Jean Baptiste Joseph Fourier, en su libro "Teoría Analítica del Calor", publicado en 1822; posteriormente, en 1965 Cooley y Tukey publicaron el artículo denominado "Un algoritmo para calcular las Series de Fourier

Complejas" [1], el cual es conocido como algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) y es ampliamente utilizado en la actualidad para el cálculo de la versión discreta de la transformada de Fourier conocida como DFT (Discrete Fourier Transform). La Transformada de Fourier es una herramienta matemática que tiene un uso muy amplio y puede ser aplicada en áreas como análisis espectral, ecuaciones diferenciales, resolución de pro-

blemas elásticos estacionarios y dinámicos, incluso el cálculo de la FFT en sí misma es un importante caso de estudio [2]. En lo referente al tratamiento digital de señales e imágenes, se puede implementar en software y/o hardware para el reconocimiento de voz e imágenes o mejoramiento y eliminación de ruido [3]. Dado que las computadoras trabajan única y exclusivamente con información discreta y finita, la herramienta utilizada para el procesamiento digital es la DFT, de ahí que existan diversos acercamientos a su solución mediante el uso de otras transformaciones afines a la de Fourier [4] y más recientemente utilizando redes neuronales [5]. Tanto el conocimiento teórico de las propiedades de la transformada de Fourier así como su implementación práctica son fundamentales para aquellos interesados en el procesamiento de imágenes, la versión bidimensional de la DFT, conocida como DFT-2D es un proceso que mapea una imagen escalar f de MN en una transformada de Fourier de valores complejos F , esto es también conocido como mapeo del dominio espacial al dominio de la frecuencia. El principal beneficio de la transformada es que los cambios en el dominio de la frecuencia pueden afectar componentes espectrales específicos en la imagen. Una vez modificada la señal en el dominio de la frecuencia, la DFT 2D inversa mapea la transformación de regreso al dominio espacial. El proceso completo se denomina filtrado de Fourier.

2. Desarrollo Matemático de la DFT

En muchos procesos del tratamiento de señales o imágenes se trabaja con elementos discretos. En este caso un concepto central para el análisis en sistemas lineales y de la transformada de Fourier es la delta de Dirac y su propiedad de desplazamiento [3].

La delta de Dirac δ , llamada por abuso de lenguaje "función" δ de Dirac, se puede considerar informalmente como una función que toma el "valor" infinito en cero y el valor 0 en los demás puntos, y cuya integral vale 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

La delta de Dirac no es una función sino una función generalizada o distribución también conocida como *función impulso* y que tiene la propiedad de desplazamiento con respecto a la integración en un punto arbitrario t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (1)$$

donde $f(t)$ es una función continua en t_0 que se anula

fuera de algún intervalo finito (soporte de la función) y que se conoce como *función de prueba*.

Con la delta de Dirac definimos la *función peine de Dirac* $s_{\Delta T}$ que es una suma de deltas de Dirac espaciadas en ΔT dada por $s_{\Delta T}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$. A esta función también se le conoce como tren de impulsos unitarios.

Se sabe que una función $f(t)$ de variable continua que es periódica con periodo T , puede ser expresada como serie de Fourier, en la forma $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ donde los coeficientes de Fourier son

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ya que el tren de impulsos es una función periódica con periodo ΔT , se halla su serie de Fourier $s_{\Delta T}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$ Donde:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} s_{\Delta T}(t)e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt \\ &= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \delta(t)e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt = \frac{1}{\Delta T} \end{aligned}$$

por tanto la serie de Fourier del tren de impulsos llega a ser

$$s_{\Delta T}(t) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} \quad (2)$$

La transformada continua de Fourier para una función en una dimensión está definida como

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

donde $j^2 = -1$.

La transformada de Fourier inversa de $F(\omega)$ está definida como

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

La variable t corresponde al tiempo y la variable ω a la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. Se dice que t está en el dominio temporal y que ω está en el dominio frecuencial. Las funciones $f(t)$ y $F(\omega)$ son llamadas el par de transformadas de Fourier. Para cualquier función $f(t)$, la transformada de Fourier $F(\omega)$ es única y viceversa.

Para el impulso localizado en $t = t_0$ $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} = \cos(\omega t_0) - j\sin(\omega t_0)$ y ya que la transformada de Fourier es lineal y $\mathcal{F}\{e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\} = 2\pi\delta(\omega -$

$\frac{2\pi n}{\Delta T}$), entonces para un tren de impulsos usando (2) tenemos

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathcal{F}\{s_{\Delta T}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\Delta T} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} \\ &= \frac{2\pi}{\Delta T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

este resultado fundamental nos dice que la transformada de Fourier de un tren de impulsos con periodo ΔT en el tiempo es también un tren de impulsos cuyo periodo es $\frac{1}{\Delta T}$ en la frecuencia.

La propiedad de convolución es una de las más importantes que se asocian a la transformada de Fourier. A partir de ella se muestra la relación entre el filtrado espacial y el filtrado de Fourier. La integral de convolución se define como:

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (6)$$

donde t es el valor requerido para desplazar una función sobre la otra. La transformada de Fourier de la convolución de las funciones f y h es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) * h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

a través de la definición de la transformada de Fourier sabemos que el término dentro de los corchetes es la transformada de $h(t - \tau)$:

$$\mathcal{F}\{h(t - \tau)\} = H(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) * h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[H(\omega)e^{-j\omega\tau} \right] d\tau \\ &= H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= H(\omega)F(\omega) \end{aligned}$$

esta es la relación conocida como teorema de convolución y establece que una operación de convolución en el dominio temporal representa una multiplicación de funciones en el dominio de la frecuencia y viceversa:

$$\begin{aligned} f(t) * h(t) &\Leftrightarrow H(\omega)F(\omega) \\ f(t)h(t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}H(\omega) * F(\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

las funciones continuas tienen que ser convertidas en una sucesión de valores discretos antes de ser procesadas en una computadora. Esto se hace usando muestreo. Sea $f(t)$ una función continua y para muestrearla se usan intervalos uniformes ΔT de la variable independiente t . Una manera simple de obtener esto es multiplicar $f(t)$ por una función de muestreo igual a un tren de impulsos de periodo ΔT .

$$f(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T) \quad (8)$$

donde f representa la función muestreada.

El valor de cada término de la suma puede ser calculado mediante integración

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)dt = f(k\Delta T) \quad (9)$$

utilizando el teorema de convolución (7) la transformada de Fourier $F(\omega)$ de $f(t)$ es

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} = F(\omega) * S(\omega)$$

haciendo la convolución (6) de F y S , se obtiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F(\omega) * S(\omega) = 2\pi F(\tau)S(\omega - \tau)d\tau \\ &= \frac{2\pi}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \tau - \frac{2\pi n}{\Delta T}\right) d\tau \\ &= \frac{2\pi}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\delta\left(\omega - \tau - \frac{2\pi n}{\Delta T}\right) d\tau \\ &= \frac{2\pi}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

donde la última igualdad se sigue de (1).

2.1. Transformada de una función muestreada

De la definición de la transformada de Fourier tenemos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

sustituyendo (8) se tiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j\omega n\Delta T} \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó (9).

Cada f_n es una función discreta, su transformada de Fourier $F(\omega)$ es continua y periódica con periodo $\frac{1}{\Delta T}$ como en (5). Por lo tanto, se necesita caracterizar solo un periodo y el muestreo sobre un periodo es la base para la DFT.

Se quieren obtener M muestreos igualmente espaciados tomados sobre el periodo $f = 0$ a $f = \frac{1}{\Delta T}$. Esto se consigue tomando muestreos a las siguientes frecuencias $f = \frac{m}{M\Delta T}, m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$. Sustituyendo este resultado para f tenemos

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M}, m = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \quad (11)$$

esta expresión es la transformada de Fourier discreta o DFT.

De manera análoga se halla la transformada inversa discreta de Fourier (IDFT) como

$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M}, n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

con procesos completamente equivalentes para dos dimensiones, se tiene la transformada de Fourier discreta en dos dimensiones o DFT-2D como

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \quad (12)$$

donde F es una imagen digital de tamaño $M \times N$ y como en el caso discreto los valores de las variables discretas u y v deben ser evaluados en los rangos $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ y $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Y también, dada $F(u, v)$ podemos obtener $f(x, y)$ usando la transformada inversa discreta de Fourier o IDFT-2D definida como:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \quad (13)$$

un ejemplo de utilización de (12) se muestra en la Figura 1. La función de entrada es la función pulso rectangular bidimensional. En la salida se obtiene una función sampling truncada. A diferencia de la transformada de Fourier continua, una característica de la DFT es que las dimensiones de la matriz de salida son iguales a las de la imagen de entrada.

El sistema matricial de coordenadas de una imagen es lo que se denomina dominio espacial o 2D. Sin embargo, la misma imagen puede ser considerada como

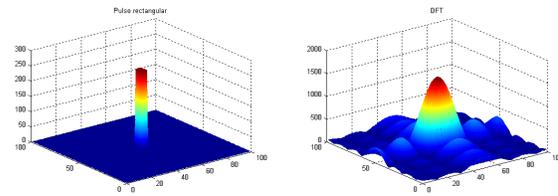


Figura 1. Ejemplo de la transformada de Fourier a) Función pulso rectangular b) DFT-2D de la función pulso rectangular

una función no periódica y definirse en otro espacio bidimensional, cuyos ejes vengán determinados por la amplitud y la frecuencia para cada dirección de la imagen. Este nuevo espacio de referencia para la descripción de la imagen es lo que se conoce como dominio de la frecuencia.

3. Filtrado

Los filtros son sistemas que se diseñan principalmente para eliminar ciertas componentes de frecuencia no deseadas de una señal. Un filtro ideal permite el paso de ciertas frecuencias sin modificarlas y elimina completamente otras. El intervalo de frecuencias que deja pasar el filtro se le denomina banda de paso y todas las frecuencias que elimina se le llama banda de supresión. De acuerdo al teorema de convolución, el proceso de filtrado se puede llevar a cabo tanto en el dominio espacial como en el dominio de la frecuencia. En la Figura 2 se muestra un diagrama a bloques del proceso de filtrado utilizando la transformada de Fourier. Una ventaja del filtrado en el dominio de la frecuencia es que para filtros de alto orden, el tiempo de proceso es menor utilizando FFT comparado con filtros por convolución [6].

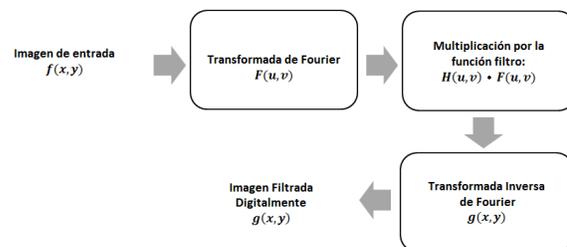


Figura 2. El proceso de filtrado de Fourier

3.1. Tipos de filtros

Los filtros ideales pueden tener cuatro tipos de respuesta: Pasa-baja o Pasa-alta, estos dos tipos de filtros están definidos por su frecuencia de corte, y Pasa-

banda o Rechaza-banda. Los filtros pasa banda o rechaza banda están definidos por su frecuencia central y su ancho de banda, definido como la diferencia entre las frecuencias de corte inferior y superior. En la Figura 3 se muestran la respuesta en frecuencia de los estos 4 tipos de filtros. Cada punto de la respuesta en frecuencia nos indica la atenuación a la que se someterá una señal a una frecuencia determinada.

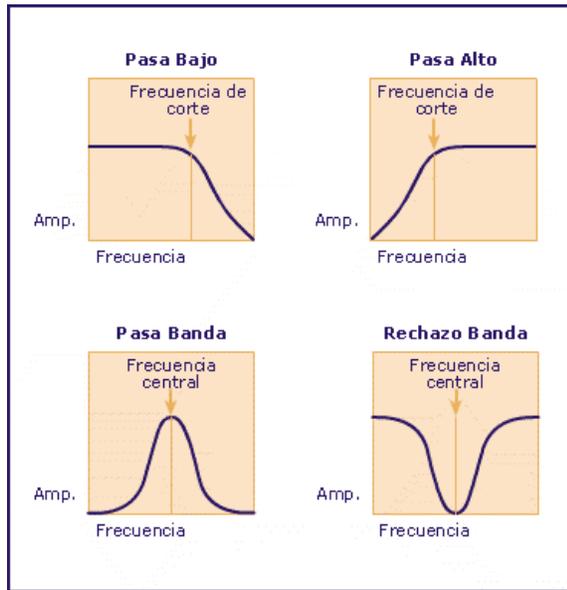


Figura 3. Respuesta en frecuencia de los cuatro tipos fundamentales de filtros

La función $H(u, v)$, es conocida como función de transferencia y representa la respuesta del filtro en frecuencia a una señal de entrada $f(x, y)$. Los filtros pasa baja (*LPF*) dejan pasar las frecuencias que están por debajo de una determinada frecuencia. Su función de transferencia se define como:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq f_c \\ 0 & \text{si } D(u, v) > f_c \end{cases}$$

donde f_c es la frecuencia de corte del filtro. Los filtros pasa alta (*HPF*) dejan pasar las frecuencias que están por encima de una determinada frecuencia. Su función de transferencia se define como:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) \leq f_c \\ 1 & \text{si } D(u, v) > f_c \end{cases}$$

los filtros pasa banda (*BPF*) dejan pasar las frecuencias que están situadas en una banda de frecuencia específica, es decir, entre dos frecuencias dadas. Su función de transferencia se define como:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_c - \frac{W}{2} \leq D \leq f_c + \frac{W}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $W = f_2 - f_1$, es la banda de paso.

Los filtros rechaza banda (*BRF*) dejan pasar todas las frecuencias excepto las que están situadas en una banda de frecuencias en particular, es decir, entre dos frecuencias f_1 y f_2 . Su función de transferencia se define como:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_c - \frac{W}{2} \leq D \leq f_c + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Filtrado de imagenes

Como caso de estudio se utiliza la imagen de la figura 4a. El tamaño de la imagen es de 300 X 400 pixeles. Una imagen de su DFT-2D es obtenida al calcular la magnitud de sus componentes y utilizar un rango de escala de grises adecuado (Figura 4). El centro de la imagen (Figura 4b) corresponde a la frecuencia cero. Se observa que las componentes de mayor magnitud se encuentran hacia el centro de la imagen es decir en las frecuencias bajas. A continuación, se muestra los resultados para los tres tipos de filtros. El filtrado se lleva a cabo utilizando mascarar sencillas que son aplicadas al espectro de la imagen original (filtro ideal). Todos los programas fueron implementados en el lenguaje de programación MATLAB.



Figura 4. Imagen original a) Dominio espacial b) Dominio de la frecuencia

4.1. Filtro pasa bajas

Para el filtro pasa bajas solo se conserva un pequeño rectángulo alrededor del centro (Ver Figura. 5a). El resto del espectro ha sido rellenado con ceros. En la Figura 5b se observa la imagen filtrada.

El efecto visual del filtro pasa bajas es el de suavizado de la imagen. Una pequeña parte del total de datos es suficiente para reconstruir la imagen con un error apenas perceptible.



Figura 5. Filtro pasa bajas a) Máscara utilizada b) Imagen filtrada

4.2. Filtro pasa altas

Para el filtro pasa altas se elimina el pequeño rectángulo en el centro del espectro. (ver Figura 6a), El cual ha sido sustituido por ceros. En la Figura 6b se observa la imagen filtrada.



Figura 6. Filtro pasa altas a) Máscara utilizada b) Imagen filtrada

El efecto visual del filtro pasa altas es el de detección de bordes o fillos de la imagen. Las componentes de alta frecuencia conforman el cambio abrupto de tonalidad.

4.3. Filtro rechaza banda

El filtro rechaza banda es especialmente útil para filtrar ruido del cual se conoce su frecuencia. Este es el caso de muchos sistemas que causan interferencia. Utilizando un tiempo de muestreo de $T_s = 0.001$ el rango de frecuencias observables f_s en la imagen es de:

$$f_s = \frac{1}{T_s} = 1KHz$$

por lo que la distribución de frecuencias alrededor del centro de la imagen va de 0 a 500 Hz para ambos lados de los dos ejes. Utilizando una onda senoidal con frecuencia de $f=250$ Hz, se generan 400 muestras de ruido. A continuación, se muestra un segmento de código en MATLAB utilizado para este fin.

$$t = 0 : 0.001 : (0.4 - 0.001)$$

$$f = 250;$$

$$fr = \text{sen}(2 * pi * f * t);$$

El ruido se genera para las dos dimensiones con lo que se obtiene una señal de ruido bidimensional. Esta señal de ruido se ha agregado a la imagen original

como se observa la Figura 7a. La Figura 7b muestra el espectro de la imagen con ruido agregado. Se observa que la señal de ruido está concentrada en 4 puntos justo a la mitad para ambos ejes tomando el origen en el centro de la imagen. (Ver Figura 7b) El filtro implementado tiene por objetivo suprimir precisamente la frecuencia del ruido. Por facilidad se ha utilizado un filtro en forma rectangular (Ver Figura 7c.). Se observa que el filtro cubre los cuatro puntos correspondientes a la señal de ruido. Finalmente, en la Figura 7d se tiene la imagen recuperada utilizando la IDFT. En comparación con la imagen original, (Figura 4a), la pérdida de información es prácticamente imperceptible.

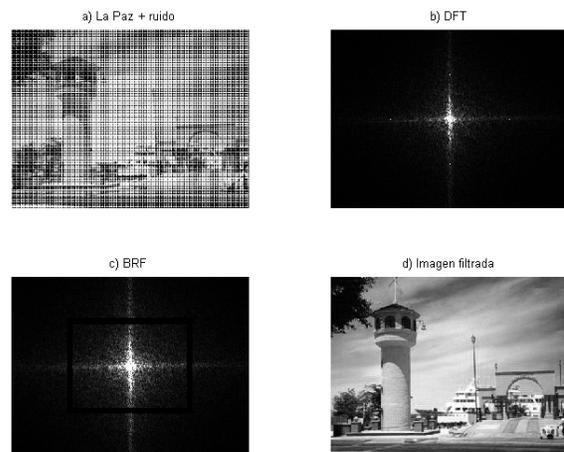


Figura 7. Filtrado de una señal con ruido. a) Imagen original mas ruido b) DFT de la imagen con ruido c) Mascara utilizada para el filtro d) Imagen filtrada

5. Conclusiones

La transformada de Fourier es una poderosa herramienta en el procesamiento de imágenes. En general, para el ojo humano es difícil percibir la eliminación de componentes de alta frecuencia, sin embargo, es fácil percibir la eliminación de frecuencias bajas donde se concentra la mayor parte de la energía. Por su parte, la utilización de filtros sencillos resulta eficiente para la eliminación del ruido de banda específica. Como trabajo futuro se pretende realizar comparaciones con otras transformadas como wavelets.

Referencias

- [1] Heideman, M. T., D. H. Johnson, and C. S. Burrus "Gauss and the history of the fast Fourier transform.", 1984. IEEE ASSP Magazine, 14-21
- [2] Brigham, E.O. "The Fast Fourier Transform", 1974 Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- [3] González, R.C., Woods, R.E. "Digital Image Processing", 2008 Third edition. Pearson, Prentice Hall
- [4] Steven W. Smith "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing". 2nd Ed. California Technical Publishing San Diego, California
- [5] M. A. Jaramillo, Morán J. A. Fernández Muñoz "cálculo Eficiente de la DFT 2D mediante Redes Neuronales sin Aprendizaje", 1999 CAEPIA-TTIA 99
- [6] Richard G. Lyons "Understanding Digital Signal Processing", 2008 Second edition, Prentice Hall
- [7] Tufts, D.W., Sadasiv, G. "The Arithmetic Fourier Transform", 1988. IEEE ASSP Magazine. 13-17