

# Diseño de controladores para un sistema subactuado

Victor Manuel Juárez Luna, Julián Israel Aguilar Duque, Jesús Salinas Coronado

## *Controllers design for an under-actuated system*

Recibido: junio 1, 2012  
Aceptado: julio 21, 2012

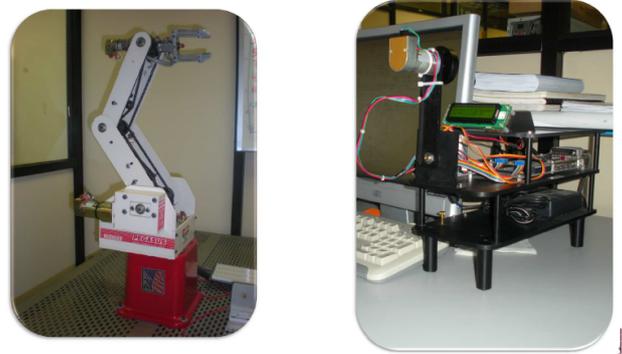
Palabras clave: Controlador; modos deslizantes; chattering; subactuado; sistema.

### **Abstract:**

*In this paper are shown the necessary steps to design controllers using variable structure techniques, specifically sliding-mode. The peculiarity of this technique is the use of the sign function. There are complications (chattering) due to the character's sign function (frequency and amplitude), approaches are presented and guaranteed by the application in an under-actuated system. Simulations and implementations are shown.*

**Keywords:** Controller; sliding-mode; chattering; under-actuated; system.

sistemas mecánicos conocidos como subactuados, llamados así porque tienen menos entradas de control que grados de libertad, ver figura 1. Es de destacar que las leyes de control aplicadas para sistemas completamente actuados, como las presentadas en Kelly y Santibañez [1], no aplican directamente en sistemas subactuados (Fantoni y Lozano [2], Brockett [3]).



*Figura 1. Sistema completamente actuado (izquierda), sistema subactuado (derecha).*

**D**ESDE la década de los ochentas, el control de robots manipuladores se ha estudiado de manera amplia proponiéndose diversas estrategias de control para resolver el caso de posicionamiento y seguimiento de trayectorias, sujeto a ambientes tanto ideales como inciertos. Existe otra clase de

Un sistema subactuado tiene menos entradas de control que grados de libertad

Se eligió un sistema subactuado para la aplicación por el mayor reto que representa, además, de que el sistema subactuado que se presenta tiene un modelo que sirve para el estudio de otros sistemas más complejos como cohetes de propulsión o robots bípedos.

Las simulaciones fueron hechas en Matlab y las implementaciones en la plataforma Mechatronics Kit de Quanser, ver figura 2.



Figura 2. El Mechatronics Kit de Quanser.

Para poder diseñar controladores lo primero que se necesita es el modelo del sistema para el caso del mechatronics kit, tenemos físicamente hablando a un péndulo invertido con una rueda inercial y su modelo es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau \quad (1)$$

La ecuación (1) corresponde al modelo en forma matricial del péndulo invertido con la rueda inercial. Este modelo es obtenido a partir del uso de las ecuaciones de LaGrange [4], para lo cual es necesario conocer la energía potencial y la energía cinética del sistema, donde:  $q_1$  es el ángulo del péndulo.

$q_2$  es el ángulo de la rueda inercial.

$J_1$ ,  $J_2$ , y  $h$  son parámetros físicos de que dependen de las dimensiones geométricas y de la distribución masa-energía.  $\tau$  es el par aplicado.

### Teoría de control de estructura variable.

Los sistemas de control de estructura variable, son el tipo de sistemas de control a través de los cuales la ley de control

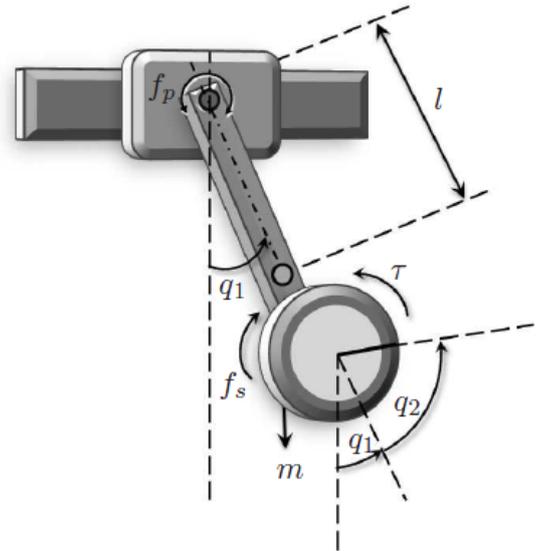


Figura 3. El péndulo con la rueda inercial.

cambia a lo largo de la evolución de la salida. El cambio está regido por alguna regla, la cual depende del estado del sistema. Un ejemplo significativo del uso de la ley de estructura variable está dada por:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } s(x, \dot{x}) > 0 \\ 0, & \text{si } s(x, \dot{x}) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Donde la función de la superficie de deslizamiento  $s(x, \dot{x})$  está dada por:

$$s(x, \dot{x}) = mx + \dot{x} \quad (3)$$

Donde  $m$  es un escalar positivo. La función de la superficie de deslizamiento depende de los estados del sistema y además es usada para decidir que estructura de control entra en acción para cualquier punto del plano de fase  $(x, \dot{x})$ , en donde se estén desarrollando las trayectorias. La expresión de la ecuación (2) es escrita propiamente como:

$$u(t) = -\text{sgn}(s(t)), \quad (4)$$

donde  $\text{sgn}(s(t))$  es la función signo, ver figura 4, es escrita propiamente como:

$$\text{sgn}(s(t)) = \begin{cases} -1, & \text{si } s(t) < 0 \\ (-1, 1), & \text{si } s(t) = 0 \\ 1, & \text{si } s(t) > 0 \end{cases} \quad (5)$$

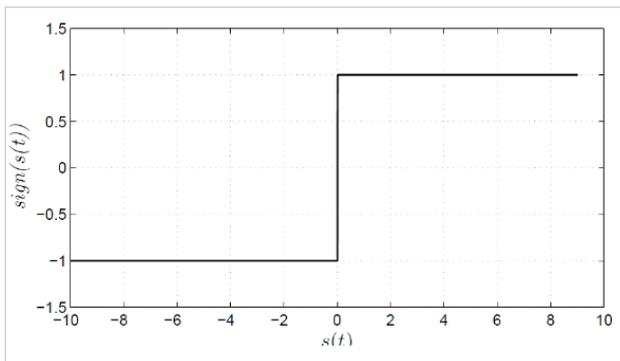


Figura 4. Función signo.

## MATERIALES Y MÉTODOS

La plataforma en la cual se desarrollan los experimentos para este trabajo es un péndulo con una rueda inercial. Éste es un sistema subactuado de dos grados de libertad y un solo actuador localizado en el extremo final del péndulo por lo que su grado subactuado es igual a uno. Físicamente se cuenta con un Mechatronics Kit de Quanserr Inc. “Inertial Wheel Pendulum”. El Mechatronics es controlado por un DSP que sirve de interfaz entre el sistema y la computadora personal (PC). La comunicación con la PC es mediante el puerto paralelo. Los experimentos son implementados sobre el sistema operativo Windows XP, en la plataforma de Matlab. Los controladores diseñados son implementados mediante Simulink y Real-Time Windows Target, con un tiempo de muestreo de 5 [ms]. La Tabla 1 muestra los parámetros físicos de la plataforma experimental. La Tabla 2 muestra los valores de los parámetros del motor Pittman LO-COG 8X22 que es el actuador del sistema.

Para el diseño del control es relativamente simple ya que se hace uso únicamente de la posición del péndulo y su derivada para generar el auto-oscilador, es decir:

$$\tau = -c_1 \operatorname{sgn}(q_1) - c_2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1). \quad (6)$$

Con este controlador se rompe la inercia del péndulo y se hace oscilar, donde  $c_1$  y  $c_2$ , son constantes positivas.

## RESULTADOS

En las figuras 6 y 7 se muestran las respuestas de simulación y experimentos respectivamente del sistema a lazo cerrado con el controlador (6) con las ganancias  $c_1 = 1.8096$  y  $c_2 =$

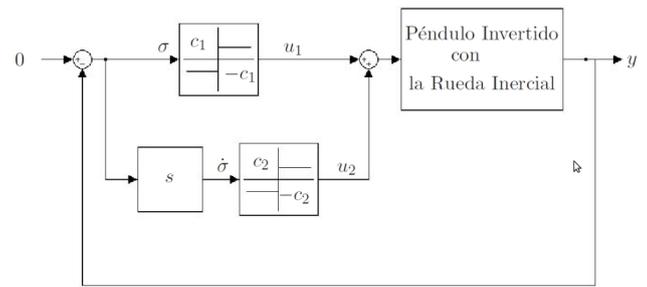


Figura 5. Diagrama a bloques del control de dos relevadores-autónomo.

$-0.1097$  Estas ganancias son calculadas para obtener una  $A_P = 5$  [rad] y una frecuencia de 8 [rad/s]. Las condiciones iniciales para realizar la simulación y los experimentos son:

$$q_1 = \dot{q}_1 = q_2 = \dot{q}_2 = 0.$$

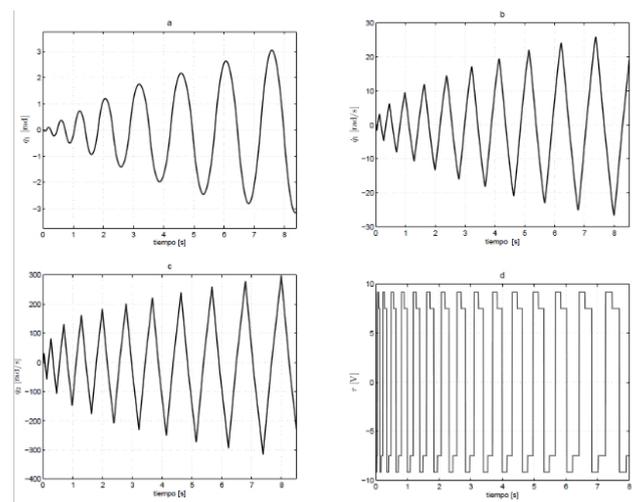


Figura 6. Simulación de la respuesta del sistema (péndulo invertido) generado con el controlador de dos relevadores.

## CONCLUSIONES

Los resultados mostrados tanto en simulaciones como en los experimentos avalan de forma fehaciente el éxito del controlador propuesto. Tomando en cuenta la literatura mencionada para el diseño de tal controlador.

Tabla 1. Parámetros físicos del Mechatronics Kit de Quanser.

Parámetro	Notación	Valor	Unidades
Masa del péndulo	$m_p$	0.2164	kg
Masa del roto	$m_r$	0.085	kg
Masa del sistema	$m$	0.3014	kg
Momento de inercia del péndulo	$J_p$	$2.233 \times 10^{-4}$	$\text{kgm}^2$
Momento de inercia del rotor	$J_r$	$2.495 \times 10^{-5}$	$\text{kgm}^2$
Momento de inercia del sistema	$J$	$4.572 \times 10^{-3}$	$\text{kgm}^2$
Distancia del pivote al centro de masa del péndulo	$l_p$	0.1173	m
Distancia del pivote al centro de masa del rotoe	$l_r$	0.1270	m
Distancia del pivote al centro de masa del sistema	$l$	0.1200	m

Tabla 2. Valores de los parámetros del actuador del sistema.

Parámetro	Valor
Constante del torque del motor	$k_m = 2.74 \times 10^{-3}$ Nm/A
Resistencia de la armadura	$R = 12.1 \Omega$
Máxima corriente del motor	$I_{max} = 1.8$ A
Inductancia	0.00627 H
Torque máximo del motor	$T_{peak} = 38.7 \times 10^{-3}$ Nm
Constante eléctrica de tiempo	$T_e = 0.5$ ms
Velocidad máxima del motor	$\omega = 822$ rad/s
Tensión máxima del motor	$V_{max} = 22$ V

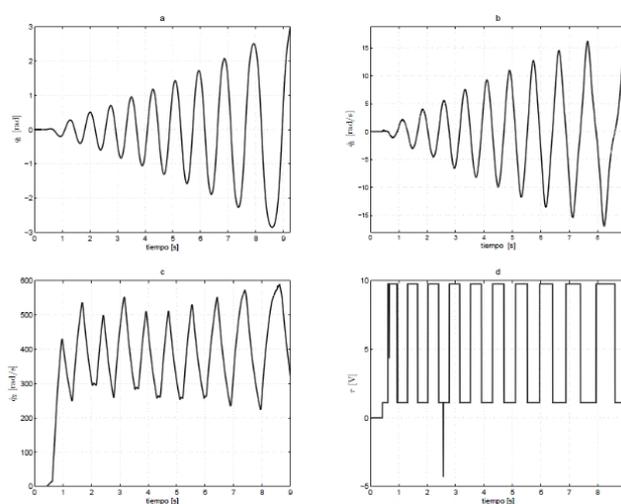


Figura 7. Experimentos de la respuesta del sistema (péndulo invertido) generado con el controlador de dos relevadores.

## Bibliografía

- [1] R. Kelly and V. Santibañez, “Control de movimiento de robots manipuladores”. Pearson Education, Madrid, 2003.
- [2] I. Fantoni and R. Lozano, “Non-linear control for underactuated mechanical systems”. Springer, 2002.
- [3] R. Brockett, “On the stability of nonlinear feedback systems,” IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 83, pp. 443–449, 1964.
- [4] K. Astrom, D. Block, and M. Spong, “The Reaction Wheel Pendulum, Lecture Notes for the Reaction Wheel Pendulum” (Part of the Mechatronics Control Kit), Urbana-Champaign, IL, 2001.

## Acerca del autor o autores

Victor Manuel Juárez Luna es Profesor de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Baja California, Ensenada, Baja California. [juarezv@uabc.edu.mx](mailto:juarezv@uabc.edu.mx)

Julián Israel Aguilar Duque es Profesor de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Baja California, Ensenada, Baja California. [julian.aguilar@uabc.edu.mx](mailto:julian.aguilar@uabc.edu.mx)

Jesús Salinas Coronado es Profesor de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Baja California, Ensenada, Baja California. [jesus.salinas.coronado@uabc.edu.mx](mailto:jesus.salinas.coronado@uabc.edu.mx)