

Performance analysis of a sliding-mode controller for active control of buildings

Análisis del desempeño de un controlador por modos deslizantes para el control activo de edificios

Antonio Concha Sánchez¹, Suresh Thenozhi², Ramón J. Betancourt³, Jaime Arroyo¹, and S. K. Gadi^{*4}

¹ Universidad de Colima, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Coquimatlán, Colima 28400, México.

{aconcha, jaime_arroyo}@ucol.mx

² Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería,
Santiago de Querétaro, Querétaro 76010, México.

suresh@uaq.mx

³ Universidad de Colima, Facultad de Ingeniería Electromecánica,
Manzanillo, Colima 28860, México.

rjimenez@ucol.mx

⁴ Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Torreón, Coahuila 27276, México.

research@SKGadi.com

Abstract

This paper presents the application of a recently proposed sliding mode controller (SMC) tuning algorithm in the active tuned mass damper (ATMD) based vibration control of seismically excited building structures. Both the controller gain and the sliding variable are automatically tuned to attenuate the structure vibrations by minimizing either the top floor displacement or the force applied to the ATMD. This tuning algorithm ensures that the transient response of the building and that of the ATMD are sufficiently fast and damped. Moreover, this algorithm guarantees that the control signals, as well as the displacements and velocities of the building and of the ATMD are within acceptable limits in the bandwidth of the earthquake. Through simulations, the performance of the controller in reducing vibrations in a 30-story building is analyzed.

Keywords— Sliding mode, Building, Active control, Active Tuned Mass Damper.

Resumen

Se presenta la aplicación de un controlador por modos deslizantes (CMD) recientemente propuesto en la literatura, y empleado en el control activo de edificios excitados por un sismo y acoplados a un amortiguador de masa activa sintonizada (AMAS). Tanto la ganancia del controlador como la variable de deslizamiento se diseñan automáticamente para atenuar las vibraciones de la estructura minimizando el desplazamiento del piso más alto del edificio o la fuerza aplicada al AMAS. Un método de sintonización selecciona los parámetros del controlador para garantizar que la respuesta transitoria de la estructura y la del AMAS sean suficientemente rápidas y amortiguadas. Dicho método garantiza que las señales de control, así como los desplazamientos y velocidades del edificio y del AMAS se encuentran dentro de límites aceptables en el ancho de banda del sismo. Mediante simulaciones se analiza el desempeño del controlador al reducir las vibraciones en un edificio de 30 pisos.

Palabras clave— Modos deslizantes, Edificios, Control activo, Amortiguador de masa activa sintonizada.

* Autor de correspondencia

I. Introducción

El control activo de estructuras con AMAS usando un CMD (Controlador por Modos Deslizantes) ha llamado la atención de los investigadores debido a la robustez de este controlador ante perturbaciones. Para este objetivo, Li et al. [1] propusieron un CMD con modelo de referencia, Mamat et al. [2] diseñaron un CMD adaptable, y Khatibinia et al. [3] desarrollaron un CMD óptimo.

En este artículo se presenta la aplicación del algoritmo propuesto en [4] para la sintonización automática de un CMD basado en la fórmula de Ackermann [5]. Este controlador se usa para el control de vibraciones de un edificio con AMAS, el cual se modela como un sistema de cuarto orden considerando que el primer modo del edificio es el dominante. De esta manera el sistema en el modo deslizante se reduce a uno de tercer orden, donde el desplazamiento del modo dominante de la estructura y el del AMAS, así como la fuerza de control son la salida de filtros dominantes de segundo orden, cuya entrada es la señal sísmica. Estos filtros se diseñan para: 1) minimizar al máximo el desplazamiento del piso superior de la estructura, o para minimizar la fuerza de control aplicada al AMAS ofreciendo una gran atenuación de este desplazamiento; 2) producir respuestas transitorias suficientemente rápidas y amortiguadas del AMAS y del edificio; 3) garantizar que los valores de la raíz cuadrada media (RMS) de la fuerza de control del AMAS, así como la de los desplazamientos y velocidades tanto del edificio como del amortiguador se encuentren dentro de límites aceptables en la banda de frecuencia de la excitación sísmica. A diferencia del artículo en [4], en el presente trabajo se analiza el desempeño del controlador por modos deslizantes en un edificio alto de 30 pisos.

II. Modelo de un edificio con AMAS

La Fig. 1 muestra a un edificio de N pisos, al cual se le instala un AMAS en su techo. Su comportamiento dinámico ante un sismo se representa por medio del siguiente modelo matemático:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{x}}(t) + \ddot{\mathbf{x}}_g(t)) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= -\mathbf{\Gamma}F(t) \\ m_d(\ddot{x}_n(t) + \ddot{x}_g(t) + \ddot{x}_d(t)) &= F(t) \\ F(t) &= u(t) - k_d x_d(t) - c_d \dot{x}_d(t) - f(\dot{x}_d(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} , $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se denominan matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, respectivamente. La matriz \mathbf{M} es diagonal, cuyos elementos m_i , $i = 1, 2, \dots, N$ son las masas de los pisos. Además, \mathbf{C} y \mathbf{K} son matrices tridiagonales, cuyos elementos son los amortiguamientos c_i y las rigideces k_i entre los pisos i e $(i-1)$, respectivamente. Mas aún, la aceleración del terreno se representa como \ddot{x}_g , y \mathbf{x} está dado por $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, donde x_i

es el desplazamiento del i -ésimo piso con respecto del terreno. La variable x_d es el desplazamiento del amortiguador con respecto a un extremo del techo del edificio; los parámetros m_d , k_d , c_d , y $f(\dot{x}_d(t))$ son la masa, rigidez, amortiguamiento y fricción no lineal del AMAS, respectivamente; la señal $u(t)$ es la fuerza de control aplicada al amortiguador, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ es un vector unitario, y $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ representa la localización del AMAS mediante el vector $\mathbf{\Gamma} = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$.

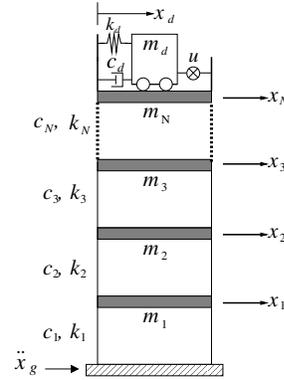


Figura 1: Edificio con AMAS

Dado que el primer modo de vibración es dominante durante un sismo, el modelo (1) se puede aproximar como:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x}_0(t) + c_0 \dot{x}_0(t) + k_0 x_0(t) &= -\beta_0 m_0 \ddot{x}_g(t) \\ &\quad - F(t) \\ m_d(\ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_g(t) + \ddot{x}_d(t)) &= F(t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde los parámetros m_0 , c_0 , k_0 y β_0 son la masa, amortiguamiento, rigidez y factor de participación del modo dominante, respectivamente [6]; además, x_0 representa el desplazamiento del modo dominante dado por:

$$x_0(t) = \frac{\phi_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}(t)}{\phi_0^T \mathbf{M} \phi_0} \quad (3)$$

donde $\phi_0 \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ es el primer modo que satisface $\phi_0^T \mathbf{\Gamma} = 1$, lo cual implica que [7]

$$x_N(t) \approx x_0(t) \quad (4)$$

La frecuencia natural del primer modo está dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \quad (5)$$

Usando (4), la ecuación (2) se puede aproximar como:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_d &= \left(\frac{m_0 + m_d}{m_0 m_d} \right) (u - c_d \dot{x}_d - f(\dot{x}_d) - k_d x_d) \\ &+ \frac{k_0}{m_0} x_N + \frac{c_0}{m_0} \dot{x}_N + \ddot{x}_g (\beta_0 - 1) \\ \ddot{x}_N &= -\frac{c_0}{m_0} \dot{x}_N - \frac{k_0}{m_0} x_N - \beta_0 \ddot{x}_g + \frac{c_d}{m_0} \dot{x}_d \\ &+ \frac{f(\dot{x}_d)}{m_0} + \frac{k_d}{m_0} x_d - \frac{1}{m_0} u\end{aligned}\quad (6)$$

Sean las variables de estado

$$z_1 = x_d, \quad z_2 = x_N, \quad z_3 = \dot{x}_d, \quad z_4 = \dot{x}_N \quad (7)$$

entonces (6) se puede escribir como:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}[u - f(z_3)] + \mathbf{D}\ddot{x}_g \quad (8)$$

donde $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_d(m_0 + m_d)}{m_0 m_d} & \frac{k_0}{m_0} & -\frac{c_d(m_0 + m_d)}{m_0} & \frac{c_0}{m_0} \\ \frac{k_d}{m_0} & -\frac{k_0}{m_0} & \frac{c_d}{m_0} & -\frac{c_0}{m_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(m_0 + m_d)}{m_0 m_d} & -\frac{1}{m_0} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\beta_0 - 1) & -\beta_0 \end{bmatrix}^T.$$

III. Control por modos deslizantes

A continuación, se presenta el controlador por modos deslizantes propuesto en [4], el cual se basa en la fórmula de Ackermann para atenuar las vibraciones en el edificio. Para ello, defínase u_a como un controlador con retroalimentación de estado completo para el sistema (8), y sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, y λ_4 los polos deseados del sistema en lazo cerrado. La señal de control u_a está dada por:

$$u_a = -\mathbf{k}^T \mathbf{z} \quad (9)$$

donde $\mathbf{k}^T \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ se puede obtener como:

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{e}^T P(\mathbf{A}) \quad (10)$$

con

$$\mathbf{e}^T = [0, 0, 0, 1][\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}]^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times 4} \quad (11)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) \quad (12)$$

Para el diseño del CMD suponga que el polo λ_4 in (12) es real y negativo. También, supóngase que se conocen cotas δ y ϖ de la aceleración del terreno \ddot{x}_g y de la fricción no lineal $f(z_3)$, respectivamente, es decir,

$$|\ddot{x}_g| \leq \delta \quad (13)$$

$$|f(z_3)| \leq \varpi \quad (14)$$

Teorema 1. [4] Sea el siguiente CMD para atenuar las vibraciones de la estructura en (8)

$$u = -M_0 \text{sign}(\sigma) \quad (15)$$

donde $\sigma = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{z}$ y $M_0 > 0$ son la variable de deslizamiento y la ganancia del controlador, respectivamente. El vector $\boldsymbol{\eta}^T$ está dado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}^T &= [\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4] = \mathbf{e}^T P_1(\mathbf{A}), \\ P_1(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\end{aligned}\quad (16)$$

Si el parámetro M_0 satisface

$$M_0 > \varpi + h_0 \quad (17)$$

donde h_0 es una constante tal que,

$$|u_a + \alpha_1 \ddot{x}_g| \leq h_0 \quad (18)$$

y α_1 se define como:

$$\alpha_1 = \beta_0(\eta_4 - \eta_3) + \eta_3 \quad (19)$$

entonces, las trayectorias del sistema en lazo cerrado alcanzan el plano $\sigma = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{z} = 0$ en un tiempo finito t_σ , y éstas permanecen confinadas en ese plano para $t \geq t_\sigma$, donde $t_\sigma \leq \sigma(0)/(M_0 - [\varpi + h_0])$. Más aún, en el modo deslizante, el orden del sistema dinámico (8) se reduce de 4 a 3, donde el modelo reducido está dado por:

$$\dot{\mathbf{z}}^* = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}^* + \mathbf{B}_1 \ddot{x}_g \quad (20)$$

donde $\mathbf{z}^* = [z_1, z_2, z_3]^T$, $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tiene como valores propios a λ_1, λ_2 y λ_3 , y $\mathbf{B}_1 = [0, 0, \alpha_2]^T$ con

$$\alpha_2 = (\beta_0 - 1) + \frac{\alpha_1(m_0 + m_d)}{m_0 m_d} \quad (21)$$

Demostración. Si el término $\mathbf{B}u_a$ se suma y resta a (8) se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}^T)\mathbf{z} + \mathbf{B}[u - u_a - f(z_3)] + \mathbf{D}\ddot{x}_g \quad (22)$$

Sea la siguiente transformación de estado

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* \\ \sigma \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \boldsymbol{\eta}^T & \end{bmatrix}}^{\mathbf{T}} \mathbf{z} \quad (23)$$

La dinámica del nuevo vector de estado $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}}$ es:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{T}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}^T)\mathbf{z} \\ &+ \mathbf{T}\mathbf{B}[u - u_a - f(z_3)] + \mathbf{T}\mathbf{D}\ddot{x}_g \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}^T)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w} \\ &+ \mathbf{T}\mathbf{B}[u - u_a - f(z_3)] + \mathbf{T}\mathbf{D}\ddot{x}_g\end{aligned}\quad (24)$$

El vector $\boldsymbol{\eta}$ en (16) es tal que [8]:

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{B} = 1, \quad \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{A}^* = \lambda_4 \boldsymbol{\eta}^T \quad (25)$$

donde $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{Bk}^T$.

Usando estas igualdades se tiene:

$$\mathbf{T}(\mathbf{A} - \mathbf{Bk}^T)\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{a}^* \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde $\mathbf{a}^* \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ y \mathbf{A}_1 es una matriz cuyos valores propios son λ_1, λ_2 y λ_3 ; además

$$\mathbf{TB} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^* \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } \mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_0 + m_d) \\ m_0 m_d \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{TD} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} \text{ con } \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_0 - 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Sustituyendo (26), (27) y (28) en (24) resulta

$$\dot{\mathbf{z}}^* = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}^* + \mathbf{a}^* \sigma + \mathbf{b}^* [u - u_a - f(z_3)] + \mathbf{d}_1 \ddot{x}_g \quad (29)$$

$$\dot{\sigma} = \lambda_4 \sigma + u - u_a - f(z_3) - \alpha_1 \ddot{x}_g \quad (30)$$

Las trayectorias del sistema (8) convergen al plano $\sigma = 0$ en un tiempo finito si $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma^2 = \sigma \dot{\sigma} < 0$, donde $\sigma \dot{\sigma}$ satisface

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\sigma} &= \sigma [\lambda_4 \sigma + u - u_a - f(z_3) - \alpha_1 \ddot{x}_g] \\ &= \lambda_4 \sigma^2 + \sigma [u - u_a - f(z_3) - \alpha_1 \ddot{x}_g] \\ &\leq \sigma [u - u_a - f(z_3) - \alpha_1 \ddot{x}_g] \end{aligned} \quad (31)$$

Sustituyendo $u = -M_0 \text{sign}(\sigma)$ en (31) y usando (14), (17) y (18) resulta

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\sigma} &\leq \sigma [-M_0 \text{sign}(\sigma) - u_a - f(z_3) - \alpha_1 \ddot{x}_g] \\ &\leq |\sigma| [-M_0 + \varpi + h_0] \\ &\leq -|\sigma| [M_0 - (\varpi + h_0)] < 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Entonces las trayectorias del sistema (8) alcanzan la superficie $\sigma = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{z} = 0$ en un tiempo finito t_σ , y permanecen allí para $t \geq t_\sigma$, donde t_σ está dado por:

$$t_\sigma \leq \frac{\sigma(0)}{M_0 - (\varpi + h_0)} \quad (33)$$

En el modo deslizante se tiene $\sigma = 0$ y $\dot{\sigma} = 0$. Sustituyendo estas igualdades en (30) resulta

$$u = u_a + f(z_3) + \alpha_1 \ddot{x}_g \quad (34)$$

Reemplazando esta señal de control en (29) produce (20). \square

Como el edificio y el AMAS se encuentran en equilibrio antes de un sismo, las condiciones iniciales $z_i(0)$, $i = 1, 2, 3, 4$ son cero, lo cual implica que $\sigma(0) = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{z}(0) = 0$ y que $t_\sigma = 0$.

Para diseñar el CMD se requiere el parámetro h_0 en (18). En la sección V.2 se presenta una metodología empleada para calcular h_0 y que se basa en la respuesta en frecuencia del sistema en el modo deslizante.

IV. Función de transferencia del sistema en el modo deslizante

La Transformada de Laplace del sistema en el modo deslizante está dada por:

$$(s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_1)\mathbf{Z}^*(s) = \mathbf{B}_1 \mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)] \quad (35)$$

donde \mathcal{L} es el operador de la transformada de Laplace y $\mathbf{Z}^*(s) = [Z_1(s), Z_2(s), Z_3(s)]^T$.

La función de transferencia $\mathbf{Z}^*(s)/\mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)]$ se representa como:

$$\frac{\mathbf{Z}^*(s)}{\mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)]} = (s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \quad (36)$$

Su polinomio característico $P_1(s)$ está dado por:

$$\begin{aligned} P_1(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) \\ &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - \lambda_3) \end{aligned} \quad (37)$$

Se tienen las siguientes funciones de transferencia

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{Z_1(s)}{\mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)]} = \mathbf{C}_{z_1} (s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \\ &= \frac{\alpha_2 (s - \psi_1)}{(s - \lambda_3)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{Z_2(s)}{\mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)]} = \mathbf{C}_{z_2} (s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \\ &= \frac{-\alpha_2 \eta_3 (s - \psi_2)}{\eta_4 (s - \lambda_3)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} G_3(s) &= \frac{Z_3(s)}{\mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)]} = \mathbf{C}_{z_3} (s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \\ &= \frac{\alpha_2 s (s - \psi_1)}{(s - \lambda_3)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (40)$$

donde

$$\psi_1 = -\frac{\eta_2}{\eta_4}, \quad \psi_2 = -\frac{\eta_1}{\eta_3}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{z_1} &= [1, 0, 0], & \mathbf{C}_{z_2} &= [0, 1, 0], \\ \mathbf{C}_{z_3} &= [0, 0, 1] \end{aligned} \quad (42)$$

Ahora se procede a calcular $U(s)/\mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)]$. Para ello suponga que el termino de fricción no lineal $f(z_3)$ en

(34) es cero; entonces la señal de control u en el modo deslizante está dada por:

$$\begin{aligned} u &= u_a + \alpha_1 \ddot{x}_g = -\mathbf{k}^T \mathbf{z} + \alpha_1 \ddot{x}_g \\ &= -\mathbf{e}^T P(\mathbf{A}) \mathbf{z} + \alpha_1 \ddot{x}_g \\ &= -\mathbf{e}^T P_1(\mathbf{A}) [\mathbf{A} - \mathbf{I}_{4 \times 4} \lambda_4] \mathbf{z} + \alpha_1 \ddot{x}_g \\ &= -\boldsymbol{\eta}^T [\mathbf{A} - \mathbf{I}_{4 \times 4} \lambda_4] \mathbf{z} + \alpha_1 \ddot{x}_g \end{aligned} \quad (43)$$

El vector de estado \mathbf{z} en (43) se puede escribir como:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{w} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (44)$$

La ecuación anterior en el modo deslizante se reduce a

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Sustituyendo (45) en (43) resulta

$$u = -\boldsymbol{\eta}^T [\mathbf{A} - \mathbf{I}_{4 \times 4} \lambda_4] \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \ddot{x}_g \quad (46)$$

Defínase

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= -\boldsymbol{\eta}^T [\mathbf{A} - \mathbf{I}_{4 \times 4} \lambda_4] \mathbf{T}^{-1} \\ &= -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} + \lambda_4 \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{T}^{-1} \\ &= -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} + [0, 0, 0, \lambda_4] = [\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2] \end{aligned} \quad (47)$$

Entonces u en (46) se puede reescribir como:

$$u = [\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \ddot{x}_g = \boldsymbol{\nu}_1 \mathbf{z}^* + \alpha_1 \ddot{x}_g \quad (48)$$

Aplicando la transformada de Laplace a (48) y empleando (36) resulta:

$$U(s) = \boldsymbol{\nu}_1 (s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)] + \alpha_1 \mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)] \quad (49)$$

de donde

$$G_u(s) = \frac{U(s)}{\mathcal{L}[\ddot{x}_g(t)]} = \boldsymbol{\nu}_1 (s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 + \alpha_1 \quad (50)$$

IV.1. Respuesta transitoria de $z_1(t)$ y $z_2(t)$

En esta sección se analiza la respuesta transitoria de las señales $z_1(t)$ y $z_2(t)$ en el modo deslizante $\sigma = 0$. Este análisis permitirá sintonizar el CMD para producir respuestas transitorias suficientemente rápidas y amortiguadas de $z_1(t)$ y $z_2(t)$ ante cambios abruptos de la señal de excitación \ddot{x}_g . Para este análisis supóngase que esta excitación es una entrada escalón. También, supóngase que el factor de amortiguamiento ζ del polinomio característico $P_1(s)$ en (37) satisface $\zeta < 1$, lo cual implica

que $P_1(s)$ tiene un polo real λ_3 y dos polos complejos conjugados λ_1 y λ_2 , es decir,

$$\begin{aligned} P_1(s) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - \lambda_3) \\ &= (s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)(s - \lambda_3) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n - j\omega_d, \quad \lambda_2 = -\zeta\omega_n + j\omega_d \quad (52)$$

donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la frecuencia natural amortiguada.

Entonces, las respuestas transitorias de $z_i(t)$, $i = 1, 2$ serán las de un sistema prototipo de segundo orden, que son afectadas por el polo adicional λ_3 y por el cero ψ_i de la función de transferencia $G_i(s)$. Además, estas respuestas se pueden especificar por medio de su tiempo de subida T_r y máximo sobreimpulso M_p . La manera en la que el polo λ_3 y el cero ψ_i afectan a dichas respuestas se describe a continuación:

1. *Efecto del cero ψ_i de $G_i(s)$* que puede ser positivo o negativo. Un ψ_i negativo tiene el efecto de decrementar T_r y de incrementar M_p en $z_i(t)$ [9]. El incremento en M_p depende de la relación $\gamma_i = |\psi_i|/(\zeta\omega_n)$; entre menor sea esta relación mayor es el incremento en M_p . Por otro lado, un ψ_i positivo resulta en un sistema $G_i(s)$ de fase mínima. Este cero incrementa ligeramente T_r y M_p , pero produce un pico inicial en $z_i(t)$ con dirección contraria a la señal de excitación. Este pico depende de la relación $\gamma_i = \psi_i/(\zeta\omega_n)$; entre más pequeña sea esta relación mayor es la magnitud de dicho pico. Por lo anterior, el cero ψ_i tiene poco efecto en la respuesta transitoria de $z_i(t)$ para $\gamma_i \geq 3$, pero su efecto se incrementa conforme γ_i decrece, especialmente cuando $\gamma_i < 1$.
2. *Efecto del polo $\lambda_3 < 0$ de $G_i(s)$* . Éste tiene el efecto de incrementar T_r y de decrementar M_p . El porcentaje de M_p depende de $\xi = |\lambda_3|/(\zeta\omega_n)$; entre mayor sea esta relación, menor es el porcentaje de M_p . El polo λ_3 tiene poco efecto para $\xi \geq 3$.

A partir del análisis anterior, los parámetros ζ , ω_n , λ_3 , ψ_1 , and ψ_2 se sintonizarán como sigue:

- El factor de amortiguamiento ζ de $P_1(s)$ se sintonizará entre el intervalo siguiente:

$$\zeta_l < \zeta < \zeta_u \quad (53)$$

Se recomiendan los límites $\zeta_l = 0.5$ y $\zeta_u = 0.9$.

- La frecuencia natural ω_n se sintonizará en función de frecuencia ω_0 del modo dominante del edificio usando los siguientes límites:

$$\omega_{nl} < \omega_n < \omega_{nu} \quad (54)$$

donde $\omega_{nl} = 0.5\omega_0$ y $\omega_{nu} = 0.8\omega_0$. Se recomienda este límite superior ω_{nu} para que el AMAS no tenga

movimientos abruptos y para evitar que éstos exciten a la estructura en lugar de protegerla. Además, se recomienda este límite inferior ω_{nl} para que la respuesta del AMAS no sea lenta, y con ello evitar una atenuación insignificante de las vibraciones en la estructura.

- Para despreciar el efecto del polo λ_3 en la respuesta transitoria de $z_1(t)$ y de $z_2(t)$, su valor se define como:

$$\lambda_3 = -3\zeta\omega_n \quad (55)$$

- Para reducir al máximo el efecto de los ceros ψ_i , $i = 1, 2$ de $G_i(s)$ en las respuestas de z_1 y de z_2 , éstos se seleccionan para satisfacer

$$|\psi_1| \geq \gamma_1\zeta\omega_n \quad (56)$$

$$|\psi_2| \geq \gamma_2\zeta\omega_n \quad (57)$$

Se recomienda seleccionar $\gamma_1 = 5$ para suprimir el efecto del cero ψ_1 en la respuesta transitoria z_1 del AMAS. Además, el parámetro γ_2 se selecciona lo más grande posible y se recomienda que $\gamma_2 \geq 1$.

IV.2. Respuesta en la frecuencia de $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ y $u(t)$

Se determina la respuesta en la frecuencia de las señales $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ y $u(t)$ para garantizar que su amplitud se encuentra dentro de límites aceptables en el ancho de banda de $\ddot{x}_g(t)$. Para este análisis, se supone que la señal de excitación \ddot{x}_g es sinusoidal y se denota como $\ddot{x}_g = \delta \sin(\omega t)$, donde δ es la cota superior de \ddot{x}_g , como se observa en (13); además, ω pertenece al ancho de banda del sismo, es decir, $\omega \in [\omega_{BWL}, \omega_{BWu}]$.

Sean las funciones de transferencia

$$H_i(s) = \delta G_i(s), \quad i = 1, 2, 3, u \quad (58)$$

donde $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ y $G_u(s)$ se definieron en la sección IV. Sea κ_i el valor cuadrático medio (RMS, por sus siglas en inglés) de las respuestas en frecuencia $H_i(j\omega)$ en el ancho de banda de $\ddot{x}_g(t)$, es decir,

$$\kappa_i = \text{RMS}_{\omega \in [\omega_{BWL}, \omega_{BWu}]} (|H_i(j\omega)|), \quad i = 1, 2, 3, u \quad (59)$$

donde ω_{BWL} y ω_{BWu} se definen como $\omega_{BWL} = 2\pi \text{ rad/s}$ y $\omega_{BWu} = 40\pi \text{ rad/s}$, ya que el contenido espectral de los sismos se encuentra entre 1 a 20 Hz [10].

V. Algoritmo de sintonización del CMD

V.1. Cálculo del vector η

Este vector η depende de los parámetros ζ y ω_n del polinomio característico $P_1(s)$ en (37). Sea Υ el conjunto posible de vectores η , con los cuales el sistema en lazo cerrado (20) en el modo deslizante satisface las siguientes tres condiciones:

1. Los límites para ζ en (53) y para ω_n en (54), el valor del polo no dominante $\lambda_3 = -3\zeta\omega_n$, así como las desigualdades en (56) y (57) correspondientes a los ceros ψ_1 y ψ_2 , respectivamente.
2. Los siguientes límites superiores $\bar{\kappa}_i$ para κ_i $i = 1, 2, 3$ en (59)

$$\kappa_i \leq \bar{\kappa}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (60)$$

donde $\bar{\kappa}_i$, $i = 1, 2, 3$ son constantes positivas con las cuales se restringe el valor máximo de $|H_i(j\omega)|$ en el ancho de banda $\omega \in [\omega_{BWL}, \omega_{BWu}]$, es decir, son los valores máximos permitidos para las señales z_1 , z_2 y z_3 en este ancho de banda.

3. La desigualdad

$$\kappa_u + \varpi \leq \bar{\kappa}_u \quad (61)$$

deducida a partir de (34), la cual indica que la suma del valor RMS κ_u de la respuesta en frecuencia $|H_u(j\omega)|$ y de la cota superior ϖ de la fricción no lineal $f(z_3)$ debe ser menor o igual que una constante $\bar{\kappa}_u$ previamente definida.

Defínase a η_* como el vector $\eta \in \Upsilon$ empleado por el CMD, el cual se obtiene al minimizar a uno de los dos índices de desempeño (ID) siguientes:

$$J_{z_2} = \min_{\eta \in \Upsilon} \kappa_2(\eta) \quad (62)$$

$$J_u = \min_{\eta \in \Upsilon} \kappa_u(\eta) \quad (63)$$

donde J_{z_2} y J_u están relacionados con la habilidad del CMD para minimizar el desplazamiento z_2 del piso más alto, y de la fuerza de control u , respectivamente. Por lo tanto, mediante la variable de deslizamiento $\sigma = \eta_*^T z$ se garantiza un mínimo de z_2 o de u , dependiendo del índice de desempeño seleccionado. Además, con esta variable de deslizamiento se asegura que los valores RMS de las señales del sistema en lazo cerrado se encuentran dentro de valores aceptables y que sus respuestas transitorias son suficientemente rápidas y amortiguadas.

V.2. Cálculo de la ganancia M_0

De acuerdo con la desigualdad (17), la ganancia M_0 debe de satisfacer $M_0 > \varpi + h_0$, donde ϖ se supone conocido y el parámetro h_0 se calculará como se describe a continuación para posteriormente calcular M_0 . De (18), el parámetro h_0 debe satisfacer $h_0 \geq |u_a + \alpha_1 \ddot{x}_g|$, donde la respuesta en frecuencia de la señal $u_a + \alpha_1 \ddot{x}_g$ está dada por $H_u(j\omega)$. Defínase a χ como la magnitud máxima de $|H_u(j\omega)|$ en el intervalo $\omega \in [\omega_{BWL}, \omega_{BWu}]$, donde χ se obtiene usando el vector η_* que minimiza cualquiera de los índices de desempeño (62) y (63), es decir,

$$\chi = \max_{\omega \in [\omega_{BWL}, \omega_{BWu}]} (|H_u(j\omega, \eta_*)|) \quad (64)$$

Tabla 1: Tuplas Γ_* obtenidas con el algoritmo de sintonización.

ID	ζ	ω_n (rad/s)	$\lambda_{1,2}$ (rad/s)	λ_3 (rad/s)	ψ_1 (rad/s)	ψ_2 (rad/s)	Parámetros del CMD η_*^T	M_0 (N)
J_{z_2}	0.5	$0.54\omega_0$	$-0.4828 \pm 0.8363j$	-1.45	-8.04	-0.583	[3.21,-297.35,5.5,-36.94]	33
J_u	0.5	$0.62\omega_0$	$-0.55 \pm 0.96j$	-1.66	-281.59	-0.67	[4.82,-315.4,7.21,-1.12]	28.36

Tabla 2: Valores RMS y pico de z_i , $i = 1, 2, 3, 4$ y $u(t)$.

Controlador	ID	z_1^{rms} (cm)	z_1^{pico} (cm)	z_2^{rms} (mm)	z_2^{pico} (mm)	z_3^{rms} (cm/s)	z_3^{pico} (cm/s)	z_4^{rms} (mm/s)	z_4^{pico} (mm/s)	u^{rms} (N)	u^{pico} (N)
Sin control	-	-	-	12.38	42.74	-	-	28.06	86.61	0	0
AMAS	J_{z_2}	11.59	28.2	3.2	9.6	16.52	52.48	7.55	24.25	3.5	13.73
AMAS	J_u	9.9	27.5	3.7	11.6	14.72	47.4	8.86	32.92	2.48	8.69

Se seleccionará $h_0 = \chi$ puesto que $\chi \geq |u_a + \alpha_1 \ddot{x}_g|$ en el espectro de \ddot{x}_g . Finalmente, M_0 se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$M_0 = \varpi + \chi + \varsigma \quad (65)$$

donde ς es una constante positiva para garantizar el cumplimiento de (17). Esta constante se fijará con un valor de 5.

V.3. Eliminación de la conmutación de alta frecuencia

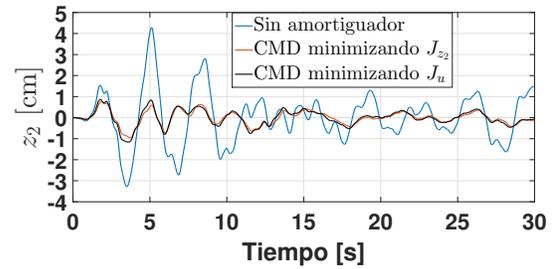
Para eliminar el parloteo o chattering, la función signo del CMD se aproxima con la siguiente función de saturación:

$$u \approx -M_0 \text{sat}(\sigma) = \begin{cases} -M_0 & \text{if } \sigma > \epsilon \\ \sigma/\epsilon & \text{if } -\epsilon \leq \sigma \leq \epsilon \\ M_0 & \text{if } \sigma < -\epsilon \end{cases} \quad (66)$$

donde ϵ se define como $\epsilon = 0.05$.

VI. Resultados de simulación

Se simula un modelo escalado de un edificio de 30 pisos ($N = 30$) con AMAS, el cual se excita con la componente Norte-sur del sismo de El Centro (California, 1940). La masa y rigidez de cada piso es de 10 kg y 1.21×10^4 N/m, respectivamente. Se supone que la estructura tiene amortiguamiento Rayleigh donde los factores de amortiguamiento del primer y segundo modos son iguales a 0.01. La frecuencia natural del modo dominante es de $\omega_0 = 1.79$ rad/s, y la masa m_d del AMAS es de 7.63 kg, que representa el 5% de la masa modal $m_0 = 152.6$ kg de la estructura. Los parámetros c_d y k_d están dados por $c_d = 3.48$ N/ms y $k_d = 21.65$ N/m. Finalmente, $f(z_3)$ en (8) se representa como $f(z_3) = \mu_d \text{sign}(z_3)$, donde μ_d


Figura 2: Desplazamiento del piso más alto

denota coeficiente de fricción de Coulomb con un valor de 0.35 N.

Para calcular los parámetros η_* y M_0 del CMD, el algoritmo de sintonización se inicializa usando $\delta = 0.5$ m/s², $\varpi = 0.5$ N, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = 1$, $\zeta_l = 0.5$, $\zeta_u = 0.9$, $\omega_{nl} = 0.5\omega_0$, y $\omega_{nu} = 0.8\omega_0$. Además, se limita el valor de las señales z_1 , z_2 , z_3 y u usando las cotas $\bar{\kappa}_1 = 50$ cm, $\bar{\kappa}_2 = 10$ mm, $\bar{\kappa}_3 = 60$ cm/s, y $\bar{\kappa}_u = 20$ N, respectivamente. El algoritmo de sintonización determina que los parámetros ζ y ω_n , con los cuales se satisface la respuestas transitorias de z_i , $i = 1, 2$ y las respuestas en la frecuencia de z_i , $i = 1, 2, 3$ y u son $\zeta \in [0.5, 0.58]$ y $\omega_n \in [0.5\omega_0, 0.68\omega_0]$. La Tabla 1 presenta las tuplas $\Gamma_* = \{\zeta, \omega_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \psi_1, \psi_2, \eta_*\}$ y las ganancias M_0 obtenidas por el algoritmo de sintonización al minimizar los índices de desempeño J_{z_2} y J_u . Mas aún, la Tabla 2 compara los resultados del AMAS con los obtenidos sin amortiguador. Se observa que el AMAS calculado al minimizar el índice de desempeño J_{z_2} reduce ligeramente más el desplazamiento z_2 del edificio que el AMAS obtenido al minimizar J_u . También, como era de esperarse, el pico y valor RMS de la fuerza de control u del AMAS que minimiza J_u son más pequeños que los producidos por el AMAS que minimiza J_{z_2} . Finalmente,

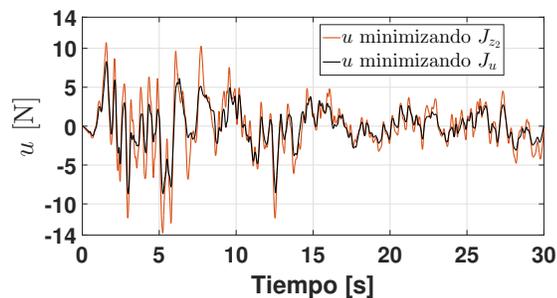


Figura 3: Fuerza de control

las Figs. 2 y 3 presentan el desplazamiento $z_2 = x_{30}$ del edificio y la fuerza de control u del AMAS.

VII. Conclusiones

Se presentó el desempeño de un controlador por modos deslizantes en un edificio alto de 30 pisos. También, se mostró que las respuestas del AMAS y del edificio se pueden describir mediante filtros dominantes de segundo orden, cuya entrada es la excitación sísmica. Sus parámetros se ajustaron automáticamente por el algoritmo de sintonización del controlador para minimizar el ID J_{z_2} o el ID J_u . El ID J_{z_2} está relacionado con la minimización del desplazamiento del piso superior, mientras que el ID J_u está relacionado con la minimización de la fuerza de control aplicada al AMAS y al mismo tiempo permite una gran atenuación de este desplazamiento.

Referencias

- [1] Luyu Li, Naibang Wang y Han Qin. «Adaptive Model Reference Sliding Mode Control of Structural Nonlinear Vibration». En: *Shock and Vibration* 2019 (2019).
- [2] Normaisharah Mamat y col. «Seismic vibration suppression of a building with an adaptive nonsingular terminal sliding mode control». En: *Journal of Vibration and Control* (2020), pág. 1077546320915324.
- [3] M Khatibinia, M Mahmoudi y H Eliasi. «Optimal sliding mode control for seismic control of buildings equipped with ATMD». En: *Iran University of Science & Technology* 10.1 (2020), págs. 1-15.
- [4] Antonio Concha y col. «A tuning algorithm for a sliding mode controller of buildings with ATMD». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 154 (2021), pág. 107539.
- [5] Juergen Ackermann y Vadim Utkin. «Sliding mode control design based on Ackermann's formula». En: *IEEE transactions on automatic control* 43.2 (1998), págs. 234-237.
- [6] A. K. Chopra. *Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2001.
- [7] JC Wu, JN Yang y WE Schmitendorf. «Reduced-order H_∞ and LQR control for wind-excited tall buildings». En: *Engineering Structures* 20.3 (1998), págs. 222-236.
- [8] J Ackermann. *Sampled-Data Control Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1985.
- [9] Gene F Franklin y col. *Feedback control of dynamic systems*. 7.^a ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2015.
- [10] JR Kayal. *Microearthquake seismology and seismotectonics of South Asia*. Springer Science & Business Media, 2008.