

# Fuzzy Control Type 2 using a Lyapunov function

## Control Difuso Tipo 2 empleando una función de Lyapunov

Rosalío Farfán-Martínez<sup>\*1</sup>, William Torres-Hernández<sup>1</sup>, and Luz del A. Cambrano-Bravata<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad Tecnológica de Campeche (UTCAM),

Carretera Federal 180 S/N, San Antonio Cárdenas, Ciudad del Carmen, Campeche, México, C.P. 24100.

farfan678@hotmail.com, {wtorres, lcambrano}@utcam.edu.mx

### Abstract

In the development of this work a hybrid controller is presented to regulate the speed and position of a servomotor that combines an intelligent control technique and a classic control; a candidate function of Lyapunov is proposed and analyzed to ensure the stability of the controller. The results are compared with a similar control technique applied to the same system. This work presents the design of a controller that uses a Lyapunov candidate function to systematically obtain the rules of a fuzzy type 2 controller. The design of the controller rule base uses only the error signals and the error derivative. Once the fuzzy type 2 controller is designed, the control law that will allow the tracking of a sinusoidal reference is determined. Likewise, the performance analysis is presented to determine the value of the separation interval of the type 2 membership functions.

**Keywords**— Fuzzy Control Type 2, Lyapunov Approach, Trajectory Tracking

### Resumen

En el desarrollo de este trabajo se presenta un controlador híbrido para regular la velocidad y posición de un servomotor que combina una técnica de control inteligente y una de control clásico; se propone una función candidata de Lyapunov y se analiza para garantizar la estabilidad del controlador. Los resultados son comparados con una técnica de control similar aplicada al mismo sistema. En este trabajo se presenta el diseño de un controlador que utiliza una función candidata para obtener

sistemáticamente las reglas de un controlador difuso tipo 2. El diseño de la base de reglas del controlador utiliza las señales de error y la derivada del error. Una vez que se diseña el controlador difuso tipo 2, se determina la ley de control que permitirá realizar el seguimiento de una referencia senoidal. Así mismo, se presenta el análisis de desempeño para determinar el valor del intervalo de separación de las funciones de membresía tipo 2.

**Palabras clave**— Control Difuso Tipo 2, Enfoque de Lyapunov, Seguimiento de Trayectorias

## I. Introducción

Los sistemas difusos son utilizados en muchas aplicaciones científicas y de ingeniería, principalmente en el área del control automático y el reconocimiento de patrones. Los conjuntos difusos fueron introducidos por L. A. Zadeh a mediados de los años sesenta [1] para procesar datos afectados de incertidumbre no probabilística.

Los sistemas difusos tipo 1 pueden manejar las variables lingüísticas, el razonamiento de los expertos y reproducir el conocimiento de los sistemas a controlar, sin embargo, no pueden manejar ciertas incertidumbres tales como dispersiones en las mediciones y distorsiones lingüísticas del conocimiento de los expertos [2].

Los sistemas difusos tipo 2 pueden manejar este tipo de incertidumbres y además tienen la capacidad de modelar sistemas complejos no lineales, logrando un mejor desempeño de los controladores diseñados bajo este enfoque. Los conjuntos difusos tipo 2 fueron propuestos originalmente por Zadeh en 1975. En la literatura se reportan diversas aplicaciones de control empleando los sistemas difusos tipo 2, las cuales son aplicadas a diversos sistemas.

\* Autor de correspondencia

En [3], se realiza un controlador basado en lógica difusa tipo 2 utilizando algoritmos genéticos para controlar la velocidad de un motor de corriente directa. El controlador es programado en un FPGA (Field Programmable Gate Array) para su evaluación.

En [4], se diseña un controlador difuso tipo 2 estable, usando la síntesis difusa de Lyapunov propuesta por [5] aplicado a un manipulador robótico de un grado de libertad. Los resultados son comparados con un controlador difuso tipo 1.

En [6], presentan el diseño de un controlador difuso tipo 2 PID (Proporcional Integral Derivativo) aplicado a un robot paralelo. Emplean algoritmos genéticos para determinar los valores óptimos del PID. La función objetivo a minimizar es el ITAE (Integral of time multiplied absolute error); los parámetros del controlador son calculados para que el robot realice el seguimiento de la trayectoria de control. El controlador difuso tipo 2 presenta un buen desempeño para el seguimiento de trayectorias en robots de este tipo con base en el análisis del índice del error realizado.

Un esquema de control que combina la lógica difusa tipo 2 y el control adaptable es aplicado a un motor síncrono de imanes permanentes en [7]. El objetivo de control consiste en lograr el seguimiento de la trayectoria y robustez ante la presencia de incertidumbre y perturbaciones. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se analiza utilizando la teoría de Lyapunov.

En [8] se presenta la aplicación de un controlador difuso tipo 2 para un motor de corriente directa de 5 hp ante la presencia de un incremento del 100 por ciento del par de carga externo. Los resultados son comparados con un controlador difuso tipo 1 empleando como criterios de desempeño índices basados en el error: ISE (Integral square-error), IAE (Integral absolute error) e ITAE. El controlador difuso tipo 2 muestra mejor desempeño debido al manejo de las incertidumbres y de las dinámicas no modeladas.

En [9] se diseña un controlador difuso tipo 1 empleando una función de Lyapunov para controlar un sistema mecánico. La posición de un servomotor a nivel simulación es regulada presentando resultados aceptables para sistemas que presentan tiempos de retardo.

En [10] se derivan las condiciones de estabilidad de un sistema difuso tipo 2 usando una función de Lyapunov. Este análisis toma en consideración las características de las funciones de membresía. Los resultados obtenidos muestran una buena efectividad a nivel simulación en un problema numérico.

En [11] se desarrolla un controlador difuso tipo 2 para un sistema no lineal empleando una función de Lyapunov. Se derivan las condiciones de estabilidad en lazo cerrado y el esquema es validado en un motor síncrono de imanes

permanentes (PMSM, por sus siglas en inglés) con buenos resultados.

En este trabajo de investigación se propone el diseño del controlador para la posición del servomecanismo y además se analiza la estabilidad del mismo. Se propone una función candidata de Lyapunov para garantizar la estabilidad del sistema y se analizan criterios de desempeño con base en el error de seguimiento.

El artículo se organiza de la siguiente manera: en la sección II se describen las características físicas del servomecanismo y el modelo matemático asociado. En la sección III se analiza el algoritmo de control, se describe el esquema de control a implementar, los conjuntos difusos tipo 2, la síntesis difusa de Lyapunov y el esquema a implementar en Simulink de Matlab. En las secciones IV y V se presentan los resultados obtenidos para el control de la posición y se describen las conclusiones obtenidas.

## II. Equipo didáctico

El equipo didáctico Servo Trainer CE110 de TQ Education and Training Ltd constituye una representación del problema de control de servomecanismos y posee gran parte de las características de un sistema real.

Los principales componentes de este sistema son: la carga inercial (tiene conectado de forma permanente un disco y posteriormente se pueden agregar dos discos más); un sensor de velocidad; una carga activa en el caso del generador; un motor de corriente directa del servomecanismo; un embrague eléctrico con caja de velocidades y un eje de salida con el sensor de posición.

El embrague eléctrico permite desconectar el sistema de posición para estudiar el control de velocidad. La caja de velocidades permite disminuir la velocidad e incrementar el par [12].

El modelo matemático en el espacio de estados del servomotor se observa en la Ecuación (1).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 + \frac{G_1G_2}{T}u \end{aligned} \quad (1)$$

Las variables y parámetros importantes del modelo son los siguientes:

- $x_1$  es la posición del servomotor en un rango de [-10,10]volts o [-180,180]grados.
- $x_2$  es la velocidad del servomotor en un rango de [-10,10]volts o [-2000,2000]r.p.m.
- $G_1$  es la ganancia del sensor de velocidad con valor de 0.9321
- $G_2$  es la ganancia del sensor de posición con un valor de 2.2475



Figura 1: Servomecanismo

- $T$  es la constante de tiempo del sistema, este valor varía dependiendo la carga del sistema; carga mínima: 0.4856 seg; carga media 1.1051 seg; carga máxima: 1.6652 seg.
- $u$  es la señal de control en un rango de [-10,10]volts.

El problema de control consiste en lograr que la posición de la flecha del motor siga una referencia dada para las 3 diferentes cargas. En este trabajo se considera el seguimiento de una trayectoria senoidal de posición.

### III. Algoritmo de control

Los sistemas difusos tipo 2 constan de un fusificador que convierte un valor real a un valor difuso; una máquina de inferencia difusa que aplica un razonamiento difuso para obtener una salida difusa; un procesador de salida que consta de un reductor que transforma un conjunto difuso tipo 2 a un conjunto difuso tipo 1 y un defusificador que traslada una salida a un valor preciso, esto se puede apreciar en la Figura 2.

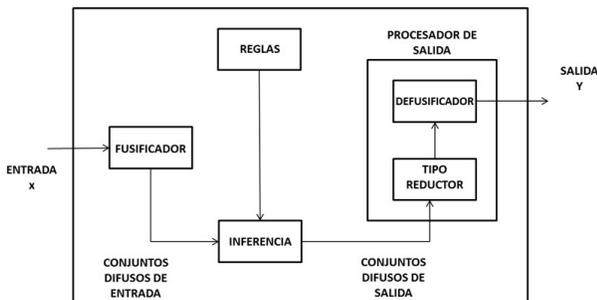


Figura 2: Componentes de un sistema difuso tipo 2

### III.1. Esquema de control

En este trabajo se utiliza la lógica difusa tipo 2 y la teoría de estabilidad de Lyapunov en el diseño de los controladores para que la posición del servomecanismo logre el seguimiento de una trayectoria de referencia de forma independiente.

Este enfoque utiliza una función candidata de Lyapunov para obtener las reglas del controlador difuso tipo Mamdani. El diseño de la base de reglas del controlador utiliza exclusivamente las señales de error y la derivada del error; esto se debe a que la función candidata utiliza estas señales como variables difusas.

Para la realización de este trabajo se utilizará específicamente la teoría propuesta en [5] para el diseño de controladores difusos tipo 2 estables de tipo Mamdani. Este método permite derivar de una forma sistemática las reglas difusas que constituyen la base de reglas del controlador a diseñar.

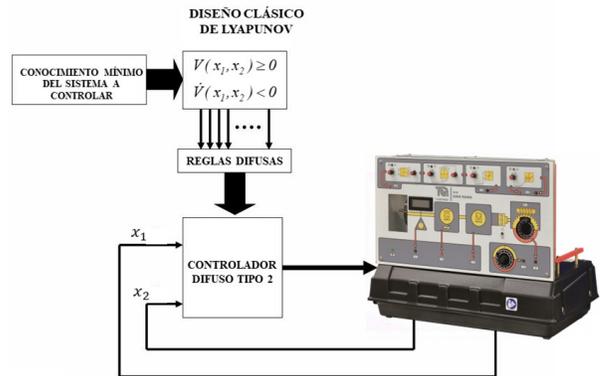


Figura 3: Esquema de control

### III.2. Conjuntos difusos tipo 2

Las funciones de membresía en los sistemas difusos tipo 2 se caracterizan por una función de membresía superior y una función de membresía inferior; el intervalo  $\epsilon$  entre estas dos funciones puede variarse para obtener un desempeño óptimo [13]. Cada una de estas funciones puede ser representada como una función de membresía de sistemas difusos tipo 1.

### III.3. Síntesis difusa tipo 2 con enfoque de Lyapunov

Dada la siguiente función candidata de Lyapunov en la Ecuación (2):

$$V = \frac{1}{2}(e^2 + \dot{e}^2) \quad (2)$$

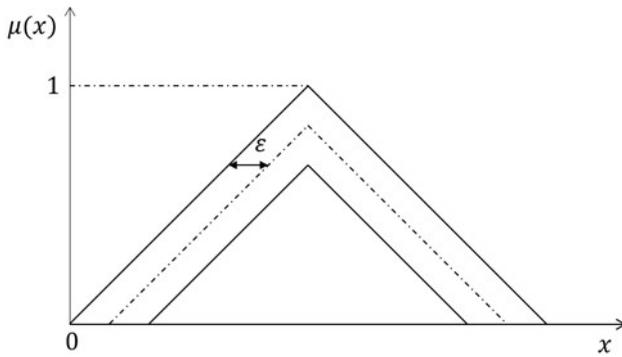


Figura 4: Conjunto difuso tipo 2

donde  $e$  es el error de seguimiento; diferenciando  $V$  se obtiene la Ecuación (3):

$$\dot{V} = e\dot{e} + \dot{e}\ddot{e} \quad (3)$$

sustituyendo  $w = \ddot{e}$  en la Ecuación (3) se obtiene la Ecuación (4):

$$\dot{V} = e\dot{e} + \dot{e}w \quad (4)$$

Se requiere entonces que se cumpla la Ecuación (5):

$$\dot{V} = e\dot{e} + \dot{e}w < 0 \quad (5)$$

Analizando la Ecuación (5), se pueden establecer las reglas difusas para  $w$  de tal forma que la desigualdad se cumpla:

- Si  $e$  es positivo y  $\dot{e}$  es positivo, entonces  $w$  es negativo grande.
- Si  $e$  es negativo y  $\dot{e}$  es negativo, entonces  $w$  es positivo grande.
- Si  $e$  es positivo y  $\dot{e}$  es negativo, entonces  $w$  es cero.
- Si  $e$  es negativo y  $\dot{e}$  es positivo, entonces  $w$  es cero.

En la Figura 5 se aprecian los conjuntos difusos para el error, los conjuntos difusos para la derivada del error se aprecian en la Figura 6, los conjuntos difusos para  $w$  se observan en la Figura 7.

El esquema de control implementado en Simulink de Matlab, es el que se aprecia en la Figura 8.

#### IV. Resultados

En este trabajo se utiliza para realizar las simulaciones la herramienta desarrollada por [9] para implementar el sistema difuso tipo 2 que genera el valor de  $w$ .

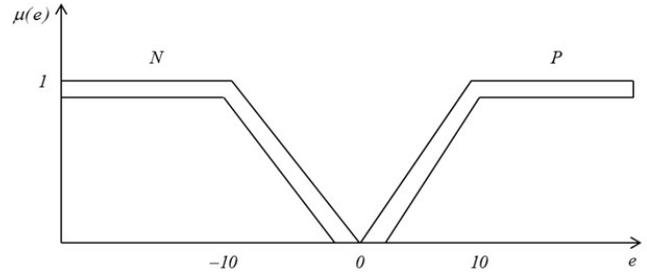


Figura 5: Conjuntos difusos para el error

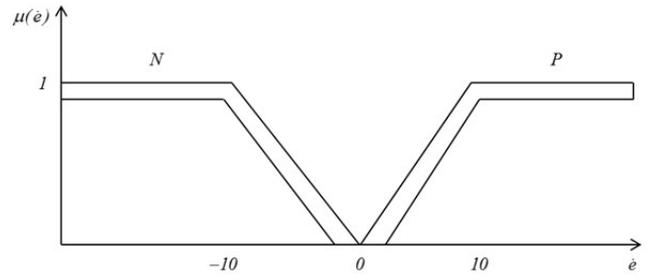


Figura 6: Conjuntos difusos para la derivada del error

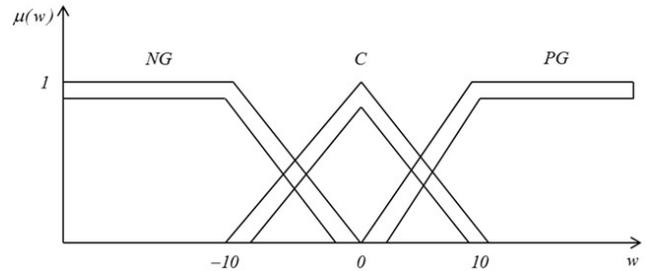


Figura 7: Conjuntos difusos para w

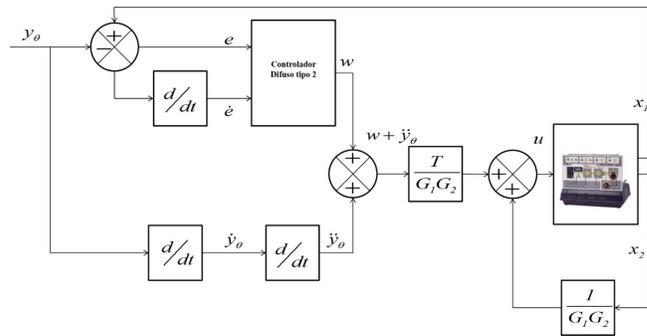


Figura 8: Esquema de control para la posición angular

La señal de referencia que se utiliza para la simulación es  $y_\theta = 108\text{sen}0.3t$  grados, que corresponde a una onda senoidal de amplitud de 108 grados, ya que cada volt de entrada al equipo corresponde a 18 grados. El esquema de control desarrollado (CDT2) es comparado con un controlador difuso tipo 1 (CDT1). La carga utilizada

es la máxima (3 discos). El intervalo de separación en los conjuntos difusos es  $\varepsilon = 0.1$ , el cual presenta mejor desempeño.

Se utilizan 2 criterios de desempeño para evaluar el comportamiento de ambos controladores; la integral del valor absoluto del error (IAE) y la integral del error cuadrático (ISE).

El seguimiento de la señal de referencia para ambos esquemas de control se muestra en la Figura 9.

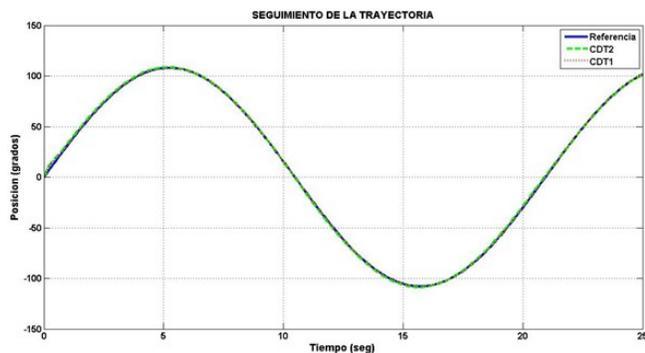


Figura 9: Seguimiento de la trayectoria CDT2 vs CDT1

El error presentado por ambos controladores se aprecia en la Figura 10. La comparación entre ambas señales de control generadas se puede apreciar en la Figura 11.

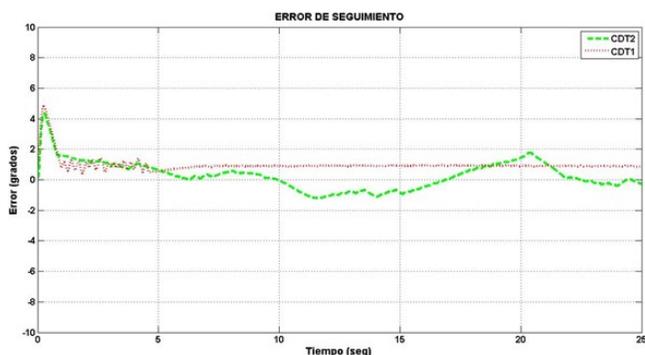


Figura 10: Error de seguimiento CDT2 vs CDT1

El comportamiento de las derivadas de la función de Lyapunov para ambos casos se muestra en la Figura 12.

La comparación entre los índices de desempeño propuestos son los siguientes: para el controlador propuesto en este trabajo,  $IAE = 1.025$ ,  $ISE = 0.065$ ; para el controlador difuso tipo 1,  $IAE = 1.343$ ,  $ISE = 0.083$ . Como se puede apreciar en las simulaciones el controlador propuesto en este trabajo muestra un mejor desempeño. Las características de la derivada de la función de Lyapunov cumple con las condiciones necesarias para garantizar estabilidad del controlador.

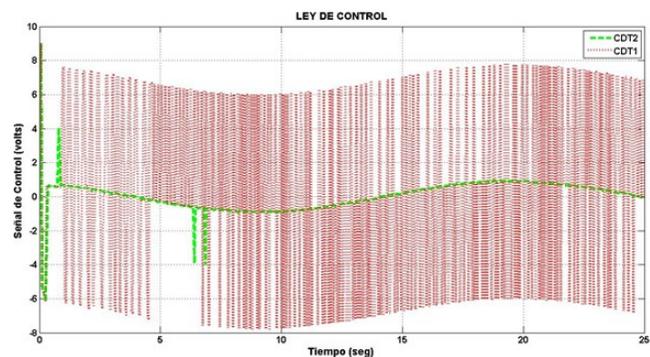


Figura 11: Señales de control CDT2 vs CDT1

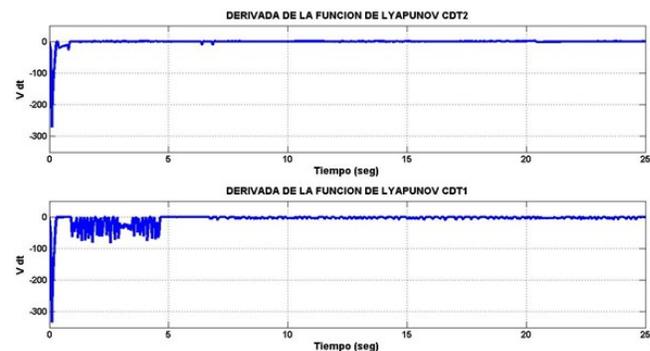


Figura 12: Derivadas de la función de Lyapunov CDT2 vs CDT1

## V. Conclusiones

De este trabajo se desprenden las siguientes conclusiones:

1. El diseño de controladores estables, basado en la síntesis difusa de Lyapunov en combinación con la lógica difusa tipo 2 muestra buenos resultados en su aplicación a los servomecanismos. Es una técnica efectiva ya que logra buenos desempeños en los índices basados en el error.

La función de Lyapunov permite establecer una base de reglas prácticas para su aplicación, aunque la lógica difusa tipo 2 requiere de un esfuerzo computacional importante para su implementación.

2. De manera general, se muestran los buenos resultados obtenidos de la aplicación del CDT2 a los servomecanismos. Este esquema de control se basa en la estabilidad de la función de Lyapunov y muestra los índices de desempeño basados en el error con mejor comportamiento que el controlador difuso tipo 1.

Las señales de control generadas por el CDT2 se muestran suaves y dentro de los límites del actuador, aunque para carga media y máxima en el control de la posición, al principio genera una señal alta en volts, pero después de unos segundos toma valores

bajos de voltaje.

3. Esta técnica de control puede extenderse al estudio de los procesos industriales, ya que con el tiempo los sensores generan incertidumbre en las mediciones provocando errores que pueden ser corregidos por este tipo de esquemas.

## Agradecimientos

Los autores de este trabajo agradecen a la Universidad Tecnológica de Campeche todo el apoyo para su realización.

## Referencias

- [1] L. A. Zadeh. «Fuzzy Sets». En: *Information and control*. Vol. 8. 1965, págs. 338-353.
- [2] D.W. Kwak H.J. and Kim y G.T. Park. «A New Fuzzy Inference Technique for Singleton Type-2 Fuzzy Logic Systems». En: *International Journal of Advanced Robotic Systems*. Vol. 9. 2012, págs. 1-7.
- [3] Y. Maldonado y O. Castillo. «Genetic Design of an Interval Type-2 Fuzzy Controller for Velocity Regulation in a DC Motor». En: *International Journal of Advanced Robotic Systems*. Vol. 9. 2012.
- [4] O Castillo. «Design of Stable Type-2 Fuzzy Logic Controllers». En: *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. 2012, págs. 49-61.
- [5] M. Margaliot y G. Langholz. «Fuzzy Lyapunov-based approach to the design of fuzzy Controllers». En: *Fuzzy Sets and Systems, Elsevier*. Vol. 106. 1999, págs. 49-59.
- [6] X. Lu y M. Liu. «Optimal Design and Tuning of PID-type Interval Type-2 Fuzzy Logic Controllers for Delta Parallel Robots». En: *International Journal of Advanced Robotic Systems*. Vol. 13. 96. 1999, págs. 49-59.
- [7] Ch. Hicham, K. Mehdy y A. A. Abdullah. «Adaptive Interval Type-2 Fuzzy Logic Control for PMSM Drives With a Modified Reference Frame». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 64. 5. 2017.
- [8] E. R. Moo y D. Romero. «Controlador difuso tipo-2 para el control de velocidad de un motor de CD sujeto a un disturbio grande». En: *Computación y Sistemas*. Vol. 22. 2. 2018, págs. 521-536.
- [9] N. R. Cazares, R. T. Aguilar y O. Castillo. «Designing Type-1 Fuzzy Logic Controllers via Fuzzy Lyapunov Synthesis for Nonsmooth Mechanical Systems». En: *Congreso Anual 2009 de la Asociación de México de Control Automático*. 2009.
- [10] T. Zhao, J. Xiao e Y. Li. «A fuzzy Lyapunov function approach to stabilization of interval type-2 T-S fuzzy systems». En: *25th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. 2013, págs. 2234-2238.
- [11] L. Shanmugam e Y. H. Joo. «Design of Interval Type-2 Fuzzy-Based Sampled-Data Controller for Nonlinear Systems Using Novel Fuzzy Lyapunov Functional and its Application to PMSM». En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. Vol. 51. 1. 2021, págs. 542-551.
- [12] «TecEquipment Ltd.» En: *CE110 Servo Trainer Handbook*. 0.
- [13] N. Cazares, L. Tupak y O. Castillo. «Designing Type-1 Fuzzy Logic Controllers via Fuzzy Lyapunov Synthesis for Nonsmooth Mechanical Systems: The Perturbed Case». En: *Computación y Sistemas*. Vol. 14. 3. 2011, págs. 283-293.