

Modelado Matemático y Control PD de un Quadrotor

H. Yáñez-Badillo^a, R. Tapia-Olvera^b, F. Beltrán-Carbajal^c, O. Aguilar-Mejía^a, I. López-García^c

^aUniversidad Politécnica de Tulancingo, Departamento de Posgrado.
Ingenierías No.100, Col. Huapalcalco, C.P. 43629, Tulancingo, Hgo., México.
Likan_oi@hotmail.com, omar.aguilar@upt.edu.mx

^bUniversidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, División de Ingeniería Eléctrica.
Av. Universidad 3000, Cd. Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510 Ciudad de México, México.
rtapia@fi-b.unam.mx

^cUniversidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, Departamento de Energía.
Av. San Pablo No. 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, Delegación Azcapotzalco, Ciudad de México, México.
{fbeltran, ilg}@azc.uam.mx

2016 Published by *DIFU*_{100ci}@ <http://difu100cia.uaz.edu.mx>

Resumen

Se presenta el modelado matemático y un enfoque de control proporcional derivativo (PD) de un helicóptero de cuatro rotores, el cual se conoce en la literatura con el nombre de Quadrotor. Se describe también algunas estrategias de control y aplicaciones actuales del Quadrotor desarrolladas por varios grupos de investigación. El modelo matemático de este sistema mecatrónico se desarrolla mediante la formulación de Newton-Euler. Posteriormente se plantea un controlador PD para seguimiento de trayectorias de referencia. Se incluyen algunos resultados de simulación computacional que muestran el desempeño adecuado del esquema de control.

Palabras clave: Quadrotor, Helicóptero de cuatro rotores, Modelado matemático, Control PD.

1. Introducción

Un robot aéreo es un sistema capaz de sostener el vuelo sin control directo del humano y es capaz de ejecutar una tarea específica [1]. Los robots aéreos o vehículos aéreos no tripulados UAV (*Unmanned Aerial Vehicles*) se han vuelto rápidamente comunes y abarcan un enorme rango de tamaños y formas [2]. Encontramos a los de ala fija, los dirigibles y los vehículos aéreos provistos de rotores. Estos últimos tienen una amplia gama de configuraciones y su principal característica es que permiten el despegue y aterrizaje vertical. Aquí, se incluyen al helicóptero convencional, los de tipo coaxial y múltiples rotores, donde se identi-

can las configuraciones de cuatro, seis y ocho rotores.

Un Quadrotor es un sistema sub-actuado (*underactuated*), con seis grados de libertad y cuatro rotores independientes. Se requieren técnicas de control eficientes para la navegación y estabilización del Quadrotor. En la literatura existen diversas propuestas para llevar a cabo estas tareas. La elección de una técnica adecuada de control depende principalmente de la tarea que se le asigne al robot. Esta configuración no es nueva, su existencia data del año 1922. Un año previo, la *US Army Air Corps* encomendó al Dr. Bothezat el desarrollo de una máquina de vuelo vertical [3]. En la figura 1 se muestra el prototipo de Bothezat, el cual tenía un peso de 1700 kg, y su primer vuelo fue el 22 de Octubre de 1922.



Figura 1. El Quadrotor de Bothezat [3].

En años recientes el interés de los investigadores y especialistas de aeronáutica se ha incrementado considerablemente, lo que ha propiciado el desarrollo de nuevas configuraciones de drones, el cual es el término más común con el que quizás se hace referencia a los robots aéreos. El uso actual de nuevas tecnologías para el diseño, adquisición y procesamiento de señales, suministro de energía, manufactura, control, navegación, etc., ha beneficiado el desarrollo de los drones, con tamaños cada vez más compactos y capacidades de procesamiento elevadas, que van de la mano con las nuevas tendencias para su implementación. Debido a esto, el interés de los investigadores en las diversas áreas de desarrollo sigue en constante crecimiento, para su mejora, optimización y exploración de nuevas áreas de interés relacionadas al Quadrotor.

Las aplicaciones para los robots aéreos, incluido el Quadrotor, son variadas y en constante crecimiento, destacando las siguientes [1]:

- Sensado remoto.
- Atención en desastres.
- Vigilancia.
- Búsqueda y rescate.
- Transportación.
- Asistencia para descargas.
- Adquisición de imágenes.

Todas éstas lideradas por el desarrollo en el contexto militar. Un ejemplo de la asistencia para descargas se tiene cuando se requiere sofocar un incendio y el vehículo aéreo descarga sustancias químicas para contrarrestarlo, o en tareas de fumigación. En México,

el uso de UAV's de manera formal, nos direcciona a las paraestatales como PEMEX y CFE, que hacen uso de estos robots para el monitoreo de sus instalaciones y líneas de suministro en coordinación con elementos de la Secretaría de la Defensa Nacional. Una constante actualización y administración de recursos en estas actividades, demandan el desarrollo de nuevos prototipos con diversas características de operación, para solventar las necesidades particulares de cada aplicación.

En este artículo se describen algunos esquemas de control automático reportados en la literatura para un Quadrotor. Se presenta también el modelado matemático del dron a través de la formulación de Newton-Euler. Además, se describe un enfoque de control PD para tareas de seguimiento de trayectorias especificadas para este helicóptero de cuatro rotores. Se incluyen algunos resultados de simulación computacional para mostrar el desempeño adecuado del esquema de control para seguimiento de trayectorias de posición constantes.

2. Esquemas de Control Automático Aplicados a un Quadrotor

En el proceso de diseño de algún esquema de control de movimiento para un Quadrotor se han realizado algunas consideraciones fundamentales. La más importante es considerar a un robot como un cuerpo rígido. Se requieren de dos marcos de referencia para describir su comportamiento dinámico. Un marco solidario al móvil y otro inercial fijo a la superficie terrestre. Así, los siguientes puntos son comunmente tomados en cuenta en el diseño del control de movimiento para un Quadrotor:

- El centro de masa del robot es coincidente con el origen del marco de referencia del cuerpo.
- La estructura se supone rígida y simétrica.
- La aspas son rígidas.
- El empuje y arrastre son función del cuadrado de las velocidades angulares.

En la literatura es posible encontrar diversas propuestas basadas en controladores lineales y no lineales, todas ellas para lograr un alto nivel de desempeño [4]. Entre las principales técnicas de control resaltan controladores proporcional derivativo (**PD**), proporcional integral derivativo (**PID**), backstepping, H_∞ , estimadores de estados (filtros de Kalman), regulador lineal cuadrático (**LQR** por sus siglas en inglés), redes neuronales artificiales (**ANN** por sus siglas en inglés), algoritmos de control difuso, por mencionar algunos. El modelo no lineal es de gran utilidad, debido a que proporciona mayor

información del comportamiento físico del vehículo [5]. Sin embargo, el modelo linealizado se emplea ampliamente en la literatura, debido a que en general presenta buenos resultados de regulación alrededor de estados de operación de equilibrio deseados. Este modelo se utiliza con condiciones definidas de vuelo (hover), siendo estables y efectivos sólo en rangos de operación que corresponden a ángulos razonablemente pequeños. Dentro de las ventajas de estos diseños basados en controladores lineales se pueden mencionar: a) presentan un desempeño aceptable y b) tienen una estructura simple. Este último aspecto es el más relevante, considerando que el obtener un modelo dinámico exacto del sistema puede ser una tarea compleja [6]. El controlador **PID** funciona calculando los errores o diferencia entre la salida medida y el valor de referencia asignado, definiendo las entradas de control para ajustar la velocidad de los motores. Aunque este método de control ha sido propuesto inicialmente para sistemas lineales, también se ha utilizado para el control de sistemas no lineales [7]. En [6, 8, 9, 10, 11, 12] los estudios se enfocan en determinar un control óptimo a través de algoritmos de control convencionales PD y PID, cada trabajo tiene su propia metodología de sintonización. En [9] se presenta un algoritmo **PD** aumentado para mejorar la respuesta transitoria principalmente ante perturbaciones, la actitud del vehículo se analiza mediante el uso de cuaternios para evitar singularidades *Gimbal-Lock*.

En [8] se desarrolla un algoritmo **PID** y se hace referencia a un modelo simplificado obtenido por el método de *Euler-Lagrange*. En este estudio no se consideran los efectos giroscópicos obteniendo un modelo relativamente simple, lo cual permite contar con un primer acercamiento en el modelado, simulación e implementación de un robot de estas características. En [13] se considera una versión del modelo incluyendo efectos giroscópicos, realizando un análisis con controladores **PD**, backstepping y control inverso, el último tiene como objetivo el control del sistema a través de su dinámica inversa.

El algoritmo LQR es una forma de control óptimo lineal que tiene como objetivo reducir la magnitud de la entrada de control sin afectar el desempeño del algoritmo de control. En [6] se emplea este regulador para obtener los parámetros de ajuste que minimizan las alteraciones no deseadas (altitud) y al mismo tiempo limitar la energía de la acción de control usando un algoritmo que minimice una función de costo o índice de desempeño con factores de ponderación. En [14] se compara el desempeño del controlador **LQR** contra un controlador no lineal basado en el análisis de Lyapunov, el modelo se desarrolla de la formulación *Euler - La-*

grange. En [12] se encuentran algoritmos **PID** y **LQR**, primero se presentan las constantes del controlador PID derivadas de la teoría LQR, posteriormente se sintoniza el algoritmo **PID** con un procedimiento **ITAE** (*integral of time-weighted absolute error*) que permite minimizar el error.

De igual manera los controles convencionales se utilizan como complementos de controladores más complejos y robustos. En [15, 16] se fundamenta el diseño de controladores no lineales del tipo backstepping. En [17] se implementa un controlador backstepping especificando los parámetros empleados en la etapa de simulación, donde se proponen condiciones iniciales adversas para el vuelo estable del robot, los resultados son interesantes considerando que se tiene una buena respuesta ante perturbaciones considerables. En [18] el algoritmo de modos deslizantes se utiliza como observador de estado para estabilizar el sistema, adicionalmente se diseña un observador-estimador que pretende desprestigiar las perturbaciones inherentes del sistema con el menor número de sensores, esto se logra mediante una estrategia de linealización en la retroalimentación.

Es importante citar que en la literatura donde se desarrollan algoritmos complejos de control, su desempeño se compara bajo diversas circunstancias con controladores convencionales analizando su capacidad de controlabilidad. En [19, 20] se implementa una estrategia de modos deslizantes y posteriormente se discuten beneficios del controlador frente a las características de operación que entrega un controlador PID. En [21] se contempla el uso de un controlador por modos deslizantes, se proporcionan detalles de las simulaciones que validan su desempeño considerando algunos objetivos como la estimación de variables aerodinámicas y el seguimiento de trayectorias. Por su parte en [5, 7, 22, 23, 24] se optimizan controladores convencionales con algoritmos adaptativos. En [5] se presentan consideraciones del entrenamiento de la red neural, en línea y fuera de línea, definiendo dos capas (SHL por sus siglas en inglés) para estimar parámetros desconocidos en el modelo. En [7] un controlador neuro-PID realiza el cálculo de los coeficientes óptimos para un correcto desempeño, se enfatiza una correcta caracterización de los valores primarios por ejemplo la regla de aprendizaje, en este tipo de algoritmos se busca disminuir la demanda de operaciones en la etapa de procesamiento. En [12] se lleva a cabo un control adaptativo con una estrategia complementada utilizando modos deslizantes.

Las diferentes representaciones del modelo matemático para esta clase de robots convergen a un cierto nivel de complejidad, el cual depende de los factores que se reconocen pueden afectar de manera importante

el comportamiento dinámico del sistema en un escenario de operación específico. En [25] se hace un análisis de contribuciones previas [11, 17, 26] concluyendo su desarrollo con un mayor número de variables que describen la dinámica del sistema, además, se tiene una descripción de las consideraciones que se deben tomar en cuenta en la etapa de implementación del control en el sistema Quadrotor. Finalmente, se puede apreciar que el uso de estimadores y observadores de estado es una opción importante para este tipo de tareas de control. En [27] se tiene un diseño con filtros, en este caso un filtro de Kalman lineal, así como la versión no lineal del filtro de Kalman extendido (EKF por sus siglas en inglés), que se diseña con una estrategia LQ para lograr un mejor desempeño.

En el presente artículo se describe un enfoque de control PD para tareas de movimiento planificado para un Quadrotor. Las ecuaciones de movimiento usadas en la síntesis de este esquema de control se presentan en la siguiente sección.

3. Modelo Matemático de un Quadrotor

3.1. Movimiento de un Quadrotor

Para que el robot consiga moverse, se deben variar las velocidades angulares de cada actuador y debido a la anulación de momentos se produce el movimiento ya sea rotacional o traslacional. Cuando las velocidades angulares son iguales para los cuatro motores y la fuerza de empuje es mayor a la fuerza ejercida por la gravedad el robot consigue moverse hacia arriba (véase la figura 2a); se debe considerar que los motores 1 y 3 giren conforme las manecillas del reloj mientras que el par restante giren en sentido en contra de las manecillas del reloj. Se distinguen tres tipos de movimientos angulares para el Quadrotor, como se observa en la figura 2b: el movimiento de *roll* donde las velocidades angulares de los motores 1 y 3 se mantienen constantes, para el caso del motor 2 se debe aumentar y disminuir para el motor 4, este movimiento permite el desplazamiento en la dirección *y*.

El movimiento de *pitch* es similar al *roll*, la diferencia radica en las condiciones variables de operación que actúan en el otro par de motores, por consiguiente el movimiento se consigue en dirección *x*. El movimiento de *yaw* resulta de variar de manera uniforme la velocidad de alguno de los pares de actuadores para conseguir un movimiento conforme o en contra de las manecillas del reloj del cuerpo del robot. En la figura 3 se observan las direcciones *x*, *y* y *z* para los desplazamientos del Quadrotor.

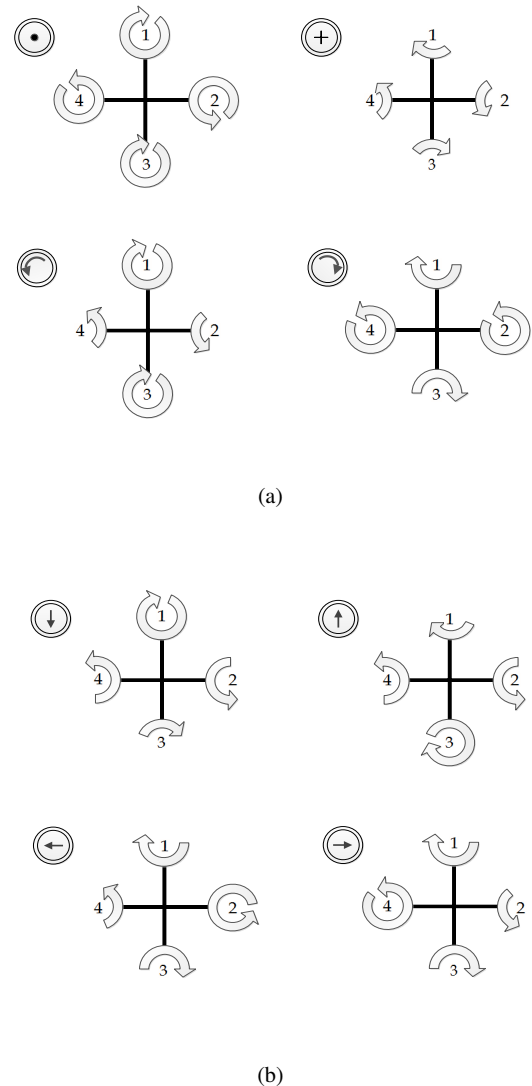


Figura 2. Movimiento del Quadrotor

Para representar el comportamiento dinámico del Quadrotor es necesario establecer coordenadas generalizadas que describan por completo la posición y actitud de un marco de referencia solidario al móvil O_{ABC} , respecto a un marco de referencia inercial fijo O_{NED} , como se muestra en la figura 3.

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

donde ξ y η son los vectores de posición lineal y angular respectivamente respecto del marco de referencia inercial fijo. Así, \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas que describe completamente la posición y orientación del cuerpo rígido mediante las posiciones

espaciales y los ángulos de *Euler*, y se observan en la figura 3. Se ha considerado la configuración donde se gira entorno a los ejes coincidentes al cuerpo un ángulo ϕ, θ y ψ para x, y y z respectivamente, refiérase a [14, 28].

3.2. Formulación Newton-Euler

En mecánica clásica, las ecuaciones de Newton - Euler describen la dinámica traslacional y rotacional de un cuerpo rígido. Estas leyes relacionan el movimiento del centro de gravedad de un cuerpo rígido con la suma de las fuerzas y torques (o momentos) actuantes **en el cuerpo** y se presentan como

$$m\dot{\mathbf{v}}_B + (\boldsymbol{\Omega}_B \times m\mathbf{v}_B) = \mathbf{F}_B \quad (1)$$

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}}_B + (\boldsymbol{\Omega}_B \times \mathbb{J}\boldsymbol{\Omega}_B) = \boldsymbol{\tau}_B \quad (2)$$

Aquí, m es la masa del robot, \mathbf{v}_B es el vector de velocidad lineal del robot, $\boldsymbol{\Omega}_B$ es el vector de velocidades angulares (p, q, r) , \mathbb{J} es la matriz de inercias, \mathbf{F}_B y $\boldsymbol{\tau}_B$ son las entradas principales de fuerza u_1 , (que engloba las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4 , figura 3) y par u_2, u_3 y u_4 , que corresponden con los movimientos de *roll*, *pitch* y *yaw* respectivamente. Así, $u_i, i = 1, 2, \dots, 4$ se utilizan como entradas de control del sistema, las cuales se relacionan con las velocidades angulares de cada rotor mediante la expresión (3). El subíndice B denota que las ecuaciones de movimiento se describen con respecto del marco de referencia móvil.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Las constantes b y d son factores de empuje y arrastre y relacionan idealmente a las entradas principales de fuerza y par con el cuadrado de las velocidades angulares de cada motor $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ y Ω_4 , estos coeficientes pueden ser aproximados mediante la teoría del elemento pala.

Debido a que para un observador en el marco de referencia inercial espacial o fijo, la fuerza centrífuga es nula, se consideró expresar el movimiento traslacional en esta referencia y la dinámica angular se expresa respecto al marco solidario al móvil, expresado en (4) y (5). Considerando el vector de gravedad \mathbf{G} y los efectos giroscópicos $\boldsymbol{\Gamma}$ de manera particular, se tienen las siguientes expresiones

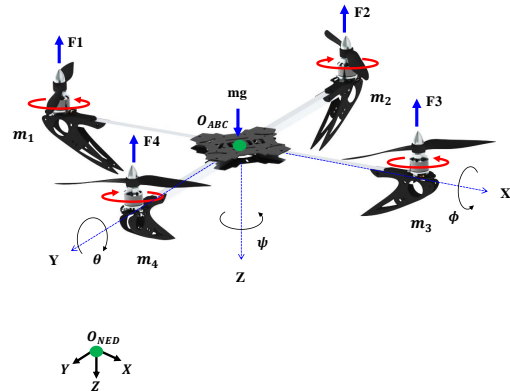


Figura 3. Diagrama esquemático de un helicóptero de cuatro rotores.

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{G} + \mathbf{R}\mathbf{F}_B \quad (4)$$

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}}_B = \boldsymbol{\tau}_B - (\boldsymbol{\Omega}_B \times \mathbb{J}\boldsymbol{\Omega}_B) - \boldsymbol{\Gamma} \quad (5)$$

donde \mathbf{R} es la matriz de rotación que permite definir la orientación del helicóptero, donde s y c se usan para denotar a las funciones *sin* y *cos*, respectivamente.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -s\psi c\phi + c\psi s\phi s\theta & s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi \\ s\psi c\theta & s\psi s\phi s\theta + c\psi c\phi & -s\phi c\psi + s\psi s\theta c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Desarrollando la expresión (4) y considerando el amortiguamiento aerodinámico debido a la resistencia del aire: k_x, k_y y k_z , las ecuaciones que describen el movimiento de traslación se presentan como

$$\ddot{x} = \frac{u_1}{m} (\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) - \frac{k_x}{m} \dot{x} \quad (7)$$

$$\ddot{y} = \frac{u_1}{m} (\sin \theta \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi) - \frac{k_y}{m} \dot{y} \quad (8)$$

$$\ddot{z} = \frac{u_1}{m} (u_1 \cos \phi \cos \theta) - g - \frac{k_z}{m} \dot{z} \quad (9)$$

Para el análisis de la dinámica angular se considera la ecuación (5), y debido a que las componentes de las velocidades angulares no son vistas de la misma manera según este ubicado el observador en alguno de los marcos de referencia ya definidos, se utilizan las relaciones cinemáticas (10), (11) y (12), véase [28].

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{w}_n^{-1} \boldsymbol{\Omega}_B \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_B = \mathbf{w}_n \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Si se requiere trabajar con un modelo no lineal simplificado se puede considerar como en [19, 20] que $p \approx \dot{\phi}$, $q \approx \dot{\theta}$ y $r \approx \dot{\psi}$, que se formaliza en las expresiones (13), (14) y (15), que son las utilizadas en este estudio para simulación

$$\ddot{\phi} = \frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \dot{\theta} \dot{\psi} - \frac{J_r}{J_{xx}} \dot{\theta} \Omega_n + \frac{u_2}{J_{xx}} \quad (13)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} \dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{J_r}{J_{yy}} \dot{\phi} \Omega_n + \frac{u_3}{J_{yy}} \quad (14)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{u_4}{J_{zz}} \quad (15)$$

donde Ω_n es la suma algebraica de las velocidades angulares *ec.*(16), que contribuyen a los efectos giroscópicos provocados por la rotación de las aspas de los motores, su momento de inercia se expresa mediante J_r . Debido a que la estructura del robot se considera simétrica, solamente se consideran los elementos de la diagonal del tensor de inercias J_{xx} , J_{yy} y J_{zz} .

$$\Omega_n = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4 \quad (16)$$

4. Un Esquema de Control PD

Debido a que la dinámica del sistema está descrita por ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de segundo orden, un esquema de control PD puede ser usado para estabilizarlo alrededor de un estado de operación de equilibrio deseado [2], ciertamente con algunas imitaciones en su desempeño dinámico. En las ecuaciones (17)-(20) se presenta la estructura para las cuatro entradas de control principales del sistema, la compensación de la gravedad para u_1 y las componentes del tensor de inercias han sido consideradas.

$$u_1 = [\ddot{z}_d - k_{Dz}(\dot{z} - \dot{z}_d) - k_{Pz}(z - z_d) + g] \frac{m}{c\phi c\theta} \quad (17)$$

$$u_2 = [\ddot{\phi}_d - k_{D\phi}(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) - k_{P\phi}(\phi - \phi_d)] J_{xx} \quad (18)$$

$$u_3 = [\ddot{\theta}_d - k_{D\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - k_{P\theta}(\theta - \theta_d)] J_{yy} \quad (19)$$

$$u_4 = [\ddot{\psi}_d - k_{D\psi}(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) - k_{P\psi}(\psi - \psi_d)] J_{zz} \quad (20)$$

donde el subíndice d hace referencia a la trayectoria deseada, las constantes proporcionales k_P y derivativas k_D son específicas para cada controlador. Para el seguimiento de trayectorias en las direcciones de los ejes x y y , es necesario establecer control sobre los ángulos θ y ϕ , respectivamente. Debido a esto se proponen dos

referencias internas simplificadas θ_d y ϕ_d , las cuales se deducen de las ecuaciones (7) y (8):

$$\theta_d = \sin^{-1} \left(\frac{m}{u_1} u_x - \frac{\sin \phi \sin \psi}{\cos \phi \cos \psi} \right) \quad (21)$$

$$\phi_d = \sin^{-1} (u_x \sin \psi - u_y \cos \psi) \quad (22)$$

Por lo tanto, para asegurar el seguimiento de trayectorias se emplean los pseudocontroladores (entradas de control auxiliar) u_x y u_y

$$u_x = \ddot{x}_d - k_{Dx}(\dot{x} - \dot{x}_d) - k_{Px}(x - x_d) \quad (23)$$

$$u_y = \ddot{y}_d - k_{Dy}(\dot{y} - \dot{y}_d) - k_{Py}(y - y_d) \quad (24)$$

Nótese que las ganancias de control k_{Pi} y k_{Di} , $i = z, \phi, \theta, \psi, x, y$, se deben seleccionar apropiadamente de tal manera que el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que conforman la dinámica del error en lazo cerrado sea asintóticamente estable.

5. Resultados en Simulación

El desempeño del esquema de control PD fue evaluado mediante simulación computacional usando la plataforma de *Simulink*. El conjunto de valores de los parámetros del Quadrotor se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del sistema

Parámetro	Valor	Unidades
g	9.81	m/s^2
m	0.973	kg
l	0.225	m
J_r	0.0000286	Nms^2
J_{xx}	0.00866	Nms^2
J_{yy}	0.00866	Nms^2
J_{zz}	0.000000229	Nms^2

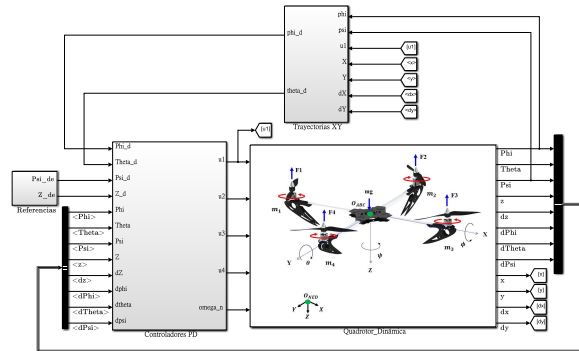


Figura 4. Diagrama de bloques del sistema en Simulink.

En las figuras 4 y 5 se presentan los bloques programados en *Simulink*, donde se observan las variables

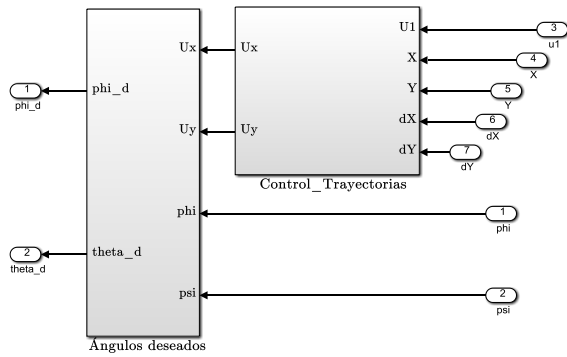


Figura 5. Bloque generador de trayectorias de movimiento en las direcciones x y y .

retroalimentadas para la implementación del esquema de control.

Para verificar el desempeño de los controladores de movimiento, se especificaron las características para cada trayectoria de referencia. Posterior a ello se presentan las respuestas del sistema en lazo cerrado. En éstas, las líneas continuas representan las señales reales y las líneas discontinuas las referencias de movimiento planificadas para el Quadrotor.

La trayectoria de referencia de posición para la dirección x esta determinada por la expresión (25). En la figura 6 se puede observar el seguimiento satisfactorio en lazo cerrado de la trayectoria establecida para el movimiento en el eje x .

$$x = \begin{cases} 0 \text{ m} & t < 6 \text{ s} \\ 4 \text{ m} & t \geq 6 \text{ s} \end{cases} \quad (25)$$

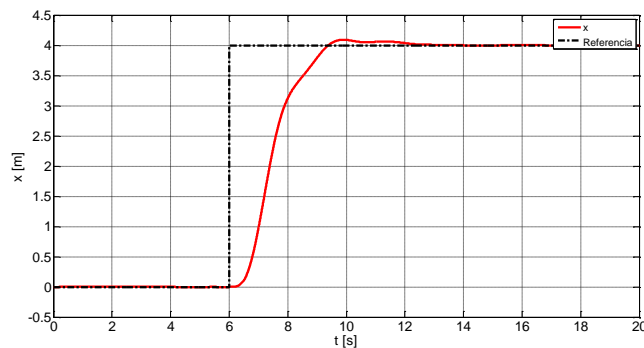


Figura 6. Seguimiento en lazo cerrado de la trayectoria de referencia en dirección x .

Para el movimiento en la dirección y se establecieron dos cambios de referencia descritos por (26). La figura 7 muestra el seguimiento adecuado en lazo cerrado para esta planificación deseada para la posición en la

dirección y .

$$y = \begin{cases} 0 \text{ m} & t < 0.2 \text{ s} \\ 1.5 \text{ m} & 0.2 \text{ s} \geq t < 15 \text{ s} \\ 1 \text{ m} & t \geq 15 \text{ s} \end{cases} \quad (26)$$

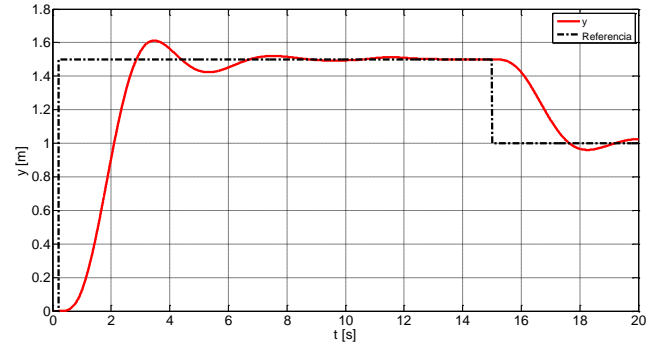


Figura 7. Seguimiento en lazo cerrado de la trayectoria de referencia en dirección y .

Con respecto al movimiento en la dirección z solo se presenta un cambio en la trayectoria de referencia como se describe por (27). El seguimiento aceptable de esta trayectoria se puede observar en la figura 8.

$$z = \begin{cases} 0 \text{ m} & t < 10 \text{ s} \\ 3 \text{ m} & t \geq 10 \text{ s} \end{cases} \quad (27)$$

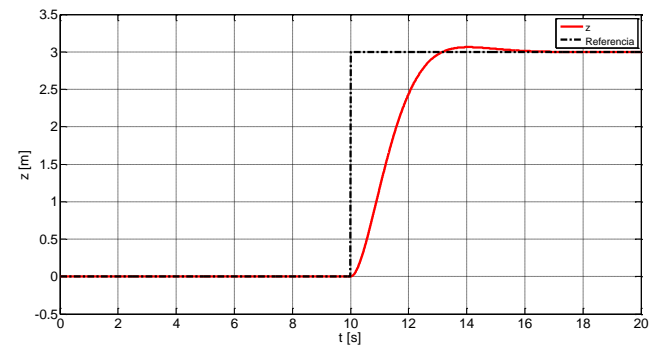


Figura 8. Seguimiento en lazo cerrado de la trayectoria de referencia en dirección z .

Las trayectorias para ϕ y θ están dadas por las expresiones (21) y (22), las cuales son generadas por el bloque correspondiente mostrado en la figura 5, por lo que están sujetas a condiciones operativas del seguimiento de trayectorias para x y y . El seguimiento razonable en lazo cerrado de estas trayectorias de referencia generadas en línea, de acuerdo a los movimientos reales en las direcciones x y y , se describe en las figuras 9 y 10.

Ahora, la trayectoria de referencia de posición angular para ψ se define de manera independiente a los demás

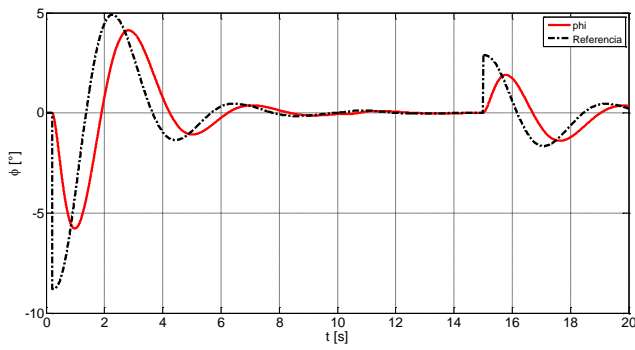


Figura 9. Seguimiento en lazo cerrado de la trayectoria de referencia ϕ .

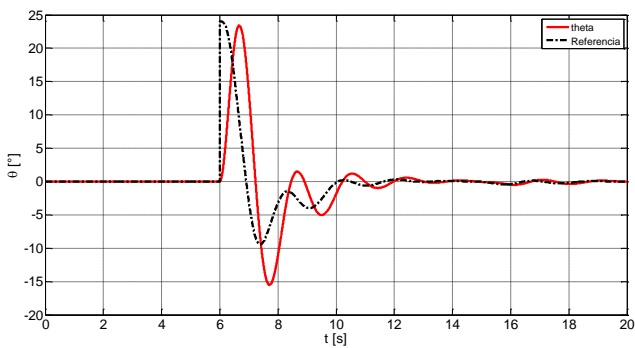


Figura 10. Seguimiento en lazo cerrado de la trayectoria de referencia θ .

movimientos por la expresión (28). En la figura 11 se verifica el seguimiento asintótico de esta trayectoria planificada.

$$\psi = \begin{cases} 0^\circ & t < 10 \text{ s} \\ 10^\circ & 10 \text{ s} \geq t < 16 \text{ s} \\ -5^\circ & t \geq 16 \text{ s} \end{cases} \quad (28)$$

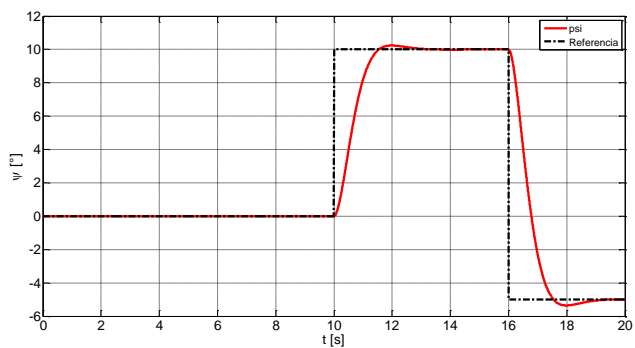


Figura 11. Seguimiento en lazo cerrado de la trayectoria de referencia ψ .

Finalmente, en las figuras 12 y 13 se presentan las

respuestas de los controladores del tipo PD correspondientes a las trayectorias de movimiento establecidas para el Quadrotor.

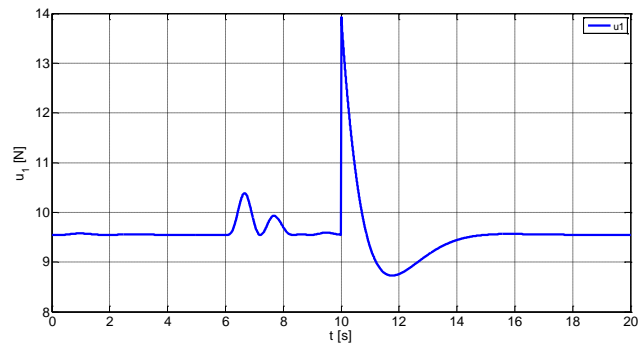


Figura 12. Señal de control de fuerza u_1 .

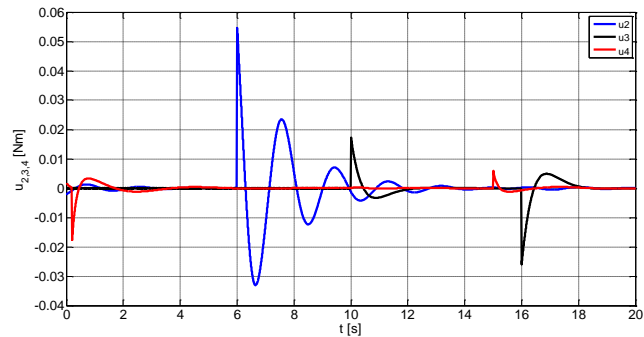


Figura 13. Señales de control de par u_2 , u_3 y u_4 .

6. Conclusiones

En este artículo se ha descrito el modelo matemático y un esquema de control PD para un Quadrotor. Algunos enfoques de control y aplicaciones de este vehículo aéreo fueron también presentados. El modelo matemático fue obtenido por el método de Newton-Euler y usado para la síntesis del esquema de control de seguimiento. El desempeño del control fue evaluado de manera satisfactoria mediante simulación computacional. Los resultados permiten observar que el desempeño del controlador PD presentado, cumple de manera aceptable con el seguimiento de las trayectorias planificadas para el Quadrotor. No obstante, se observan ligeros sobreimpulsos y retardos en las respuestas temporales del sistema. Futuros trabajos de investigación están orientados a la síntesis de esquemas de control robustos y eficientes para mejorar significativamente el seguimiento de movimientos planificados para un helicóptero de

cuatro rotores. Se tiene interés en considerar el problema de control robusto con respecto a perturbaciones endógenas y exógenas, debidas a dinámicas no modeladas e interacciones del Quadrotor con su entorno de operación. El problema del seguimiento de trayectorias más complejas para el movimiento de un Quadrotor será también abordado. Finalmente, se pretende proponer alternativas para atenuar el ruido que puede existir en las señales de medición y en las entradas de control, el cual podría deteriorar significativamente el desempeño de cualquier política de movimiento en lazo cerrado planificada para un Quadrotor.

Referencias

- [1] B. Siciliano and O. Khatib. *Handbook of Robotics*, 3rd Edition. Springer-Verlag Berlín Heidelberg, 2008, ISBN 978-3-540-23957-4.
- [2] P. Corke. *Robotics, Vision and Control*, 1st Edition. Springer-Verlag Berlín Heidelberg, 2011, ISBN 978-3-642-20143-1.
- [3] P. Castillo *et al*, *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*. Springer-Verlag London, 2005, ISBN 1-85233-957-8.
- [4] K.Y. Chee and Z.W. Zhong, "Control, navigation and collision avoidance for an unmanned aerial vehicle". *Sensors and Actuators A: Physical* 190, pp. 66-76, 2013.
- [5] H. Boudjedir *et al*, "Adaptive neural network control based on neural observer for a Quadrotor unmanned aerial vehicle". *Advanced Robotics* 28(17), pp. 1151-1164, 2014.
- [6] B. Meng-Leong *et al*, "Low-Cost Microcontroller-based Hover Control Design of a Quadcopter". *Proc. of the International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors (IRIS)* 41, pp. 458-464, 2012.
- [7] M.Fatan *et al*, "An Adaptive Neuro PID for Controlling the Altitude of Quadcopter Robot". *Proc. of the IEEE 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, pp. 662-665, 2013.
- [8] A. L.Salih *et al*, "Flight PID controller design for a UAV Quadrotor". *Scientific Research and Essays* 5(23), pp. 3660-3667, 2010.
- [9] N. Johnson *et al*, "Enhanced proportional-derivative control of a micro Quadcopter". *Proc. of the ASME Dynamics Systems and Control Conference*, pp. 1-5, 2013.
- [10] B. Erginer and E. Altug, "Modeling and PD Control of a Quadrotor VTOL Vehicle". *Proc. of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pp. 894-899, 2007.
- [11] S. Bouabdallah *et al*, "PID vs LQ Control Techniques Applies to an Indoor micro Quadrotor". *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* 3, pp. 2451-2456, 2004.
- [12] L. M.Argentim *et al*, "PID, LQR and LQR-PID on a Quadcopter Platform". *Proc. of the IEEE International Conference on Informatics, Electronics & Vision (ICIEV)*, pp. 1-6, 2013.
- [13] I. C. Dikmen *et al*, "Attitude Control of a Quadrotor". *Proc. of the 14th IEEE International Conference on Recent Advances in Space Technologies*, pp. 722-727, 2009.
- [14] P.Castillo *et al*, "Modelado y estabilización de un Helicóptero con cuatro rotores". *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, pp. 41-57, 2007.
- [15] A.A. Mian *et al*, "Backstepping based PID Control Strategy for an Underactuated Aerial Robot". *Proc. of the 17th IFAC World Congress* 17, pp. 15636-15641, 2008.
- [16] A.A. Mian and W. Daobo, "Modeling and Backstepping-based Nonlinear Control Strategy for a 6 DOF Quadrotor Helicopter". *Chinese Journal of Aeronautics* 21(3), pp. 261-268, 2008.
- [17] S. Bouabdallah and R. Siegwart, "Backstepping and Sliding-mode Techniques. Applied to an Indoor Micro Quadrotor". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pp. 2247-2252, 2005.
- [18] A. Benallegue *et al*, "High-order sliding-mode observer for a Quadrotor UAV". *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 18(4-5), pp. 427-440, 2008.
- [19] Z. En-Hui *et al*, "Second order sliding mode control for a Quadrotor UAV". *ISA Transactions* 53(4), pp. 1350-1356, 2014.
- [20] Jing-Jing X.and En-Hui Z. "Position and attitude tracking control for a Quadrotor UAV". *ISA Transactions* 53(3), pp. 725-731, 2014.
- [21] L. Luque *et al*, "Robust block second order sliding mode control for a Quadrotor". *Journal of the Franklin Institute* 349(2), pp. 719-739, 2012.
- [22] T. Dierks and S. Jagannathan, "Output Feedback Control of a Quadrotor UAV Using Neural Networks". *IEEE Transactions on Neural Networks* 21(1), pp. 50-66, 2010.
- [23] C. Nicol *et al*, "Robust Neural Network Control of a Quadrotor helicopter". *Proc. of the IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE)*, pp. 1233-1238, 2008.
- [24] B.J. Emran and A. Yesildirek, "Robust Nonlinear Composite Adaptative Control of Quadrotor" *International Journal of Digital Information and Wireless Communications (IJDWC)*, pp. 45-57, 2014.
- [25] S.Bouabdallah and R.Siegwart, "Full Control of a Quadrotor". *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 153-158, 2007.
- [26] S.Bouabdallah, "Design and Control of an Indoor Micro Quadrotor". *IEEE International Conference on Robotics & Automation*, 2004.
- [27] P. Bauer *et al*, "LQ Servo control design with Kalman filter for a Quadrotor UAV". *Periodica Polytechnic Transportation Engineering* 36(1-2), pp. 9-14, 2008.
- [28] H. Goldstain *et al*, *Classical Mehanics*, 3rd Edition Addison Wesley, 2000.