Distribución $Gamma_x$ y cálculo de probabilidades de lluvia

Rafael Magallanes-Quintanar[1] y Ricardo David Valdez-Cepeda[2*]

$Gamma_x$ distribution and calculation of probabilities of rain

Recibido: abril 3, 2009
Aceptado: abril 26, 2009

Palabras clave: Distribución Gamma; Probabilidad de lluvia; distribución normal

Abstract:
The aim of this paper is to test with precipitation data, the behavior of the Incomplete Gamma-distribution, compared with the normal distribution, and also to provide a source for calculating them.

Keywords: Gamma distribution; chance of rain; normal distribution

UNO de los problemas más importantes a los que se enfrenta la agricultura de secano, es el de la incertidumbre de esperar precipitaciones que le sean favorables. Dicho de otra manera, saber con que frecuencia ocurrirá determinada cantidad de lluvia y la frecuencia con que se presentará una cantidad superior o inferior a ella.

El llegar a conocer esta información es de suma importancia, ya que todo cultivo requiere en mayor o menor medida de una determinada cantidad de agua para poder cumplir con su ciclo vegetativo. En este sentido, al evaluar la probabilidad de lluvia se pueden determinar los riesgos o beneficios de establecer un cultivo en una zona o época determinada.

En la actualidad, existen varias técnicas para el cálculo de probabilidades de lluvia. En particular son útiles los métodos que utilizan parámetros estadísticos y funciones de distribución.

Las funciones de distribución comúnmente utilizadas para el cálculo de probabilidades de lluvia son:

- Distribución acumulativa.
- Distribución normal.
- Distribución de Galton.
- Distribución Gamma.

La elección de la distribución a utilizar se desprende de efectuar una prueba de bondad de ajuste, pero en este caso, se utiliza la distribución Gamma, pues es conocido que es la que se apega más a las características de precipitación en las zonas áridas.

Teoría

La distribución Gamma se expresa de la siguiente manera:

$$f(x)=\frac{\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)^{\gamma-1}e^{-(x-\mu)/\beta}}{\beta\Gamma(\gamma)}, \quad (1)$$

para $\gamma>0$, $\beta>0$, $x\geq\mu$, donde:
γ es un parámetro de forma de la distribución,
μ es un parámetro de ubicación de la distribución, y
β es un parámetro de escala de la distribución.

Además, Γ es la función Gamma que se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}t^{a-1}e^{-t}dt \quad (2)$$

En el caso en que $\mu=0$ y $\beta=1$ es llamada distribución gamma estándar, por lo que la ecuación de la distribución gamma se reduce a la siguiente forma:

$$f(x)=\frac{x^{\gamma-1}e^{-x}}{\Gamma(\gamma)}, \quad (3)$$

para $\gamma>0$ y $x\geq 0$.
La forma general de las funciones de probabilidad se puede expresar en términos de una distribución estándar. Todas las fórmulas subsecuentes en esta sección están dadas en esa forma.
La fórmula para la función de distribución acumulativa de la distribución gamma es la siguiente:

$$F(x)=\frac{\Gamma_x(\gamma)}{\Gamma(\gamma)}, \quad (4)$$

para $\gamma>0$ y $x\geq 0$.
$\Gamma()$ es la función gamma definida en (2) y $\Gamma_x()$ es la función gamma incompleta que se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\Gamma_x(a)=\int_0^{x}t^{a-1}e^{-t}dt. \quad (5)$$

Los parámetros estadísticos de la distribución con la ubicación de parámetros igual a cero y el parámetro de escala igual a uno se definen de la siguiente manera:

Media	γ
Moda	$\gamma-1 \quad \gamma \geq 1$
Rango	$0-\infty$
Desviación estándar	$\sqrt{\gamma}$
Sesgo	$2/\sqrt{\gamma}$
Kurtosis	$3+\frac{6}{\gamma}$
Coeficiente de variación	$1/\sqrt{\gamma}$

En la actualidad, existen varias técnicas para el cálculo de probabilidades de lluvia. En particular son útiles los métodos que utilizan parámetros estadísticos y funciones de distribución.

La estimación de parámetros se efectúa mediante el método de estimadores de momento de la distribución gamma:

$$\hat{\gamma} = \left(\frac{\bar{x}}{s}\right)^2 \tag{6}$$

$$\hat{\beta} = \frac{s^2}{\bar{x}}. \tag{7}$$

Las ecuaciones para la estimación de máxima verosimilitud de los parámetros de escala y forma, están dados en Evans et al. (2000) y Johnson et al. (1994).

La expresión alternativa de la distribución gamma incompleta usada en el presente documento tiene la siguiente forma:

$$F(x) = \left[1+\frac{x}{\beta}+\frac{1}{2!}(\frac{x}{\beta})^2+\cdots+\frac{1}{\alpha!}(\frac{x}{\beta})^{\alpha}\right] e^{-x/\beta}. \tag{8}$$

Esta expresión se puede utilizar en forma exitosa para el cálculo de probabilidades de lluvia; donde x es el valor de la precipitación pluvial en un período determinado, es decir, anual, mensual o diaria.

Como comparación se puede utilizar la distribución normal cuyas fórmulas son:

$$x = \frac{P-\bar{P}}{\sigma}, \tag{9}$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{10}$$

Además

$$P = \bar{x}Q(x) = Z(x)(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + E(x), \tag{11}$$

donde:

$$t = \frac{1}{1+F^x}$$

$$|E(x)| < 7.5 \times 10^{-8}$$

F=0.2316419	b1=0.319321520
b2=-0.356563782	b3=1.781477937
b4=-1.821255978	b5=1.330274429

$$P(x) = 1 - Q(x) \tag{12}$$

Finalmente, para elegir la distribución de mejor ajuste es común utilizar la prueba de Smirnov que está dada por el estadístico no-paramétrico siguiente:

$$NW^2 = \frac{1}{12n/100} + \sum_{i=1}^{n} \left[F(x)_i - \frac{2i-1}{2n}\right]^2, \tag{13}$$

donde:

n es el número de observaciones y $F(x)_i$ es la probabilidad de la distribución deseada de la i-ésima observación.

Datos

Los datos utilizados en el análisis fueron registrados en la estación ubicada en Calera de Victor Rosales en el estado de Zacatecas, en la ubicación geográfica 22° 59' N, 102° 43' W, a una altitud de 2158.60 m.

Los datos a analizar corresponden a un período de 32 años, desde el año de 1973 al año de 2004. (Tabla 1).

Resultados y discusión

Estimación de parámetros:

$\sum x$	13217.5
$\bar{x}$	413.046875
S^2	14726.7497
S	121.35382
α	11.5848863
β	35.6539428

Con los datos anteriores, la función de distribución gamma incompleta queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(x) \quad &= \quad \left[1+\frac{x}{35.65}+\frac{1}{2!}(\frac{x}{35.65})^2+\ldots \right. \\ &\left. + \frac{1}{12!}(\frac{x}{35.65})^{12}\right] e^{-x/35.65}, \end{aligned} \tag{14}$$

donde:

x es el valor de la precipitación pluvial sobre la cual se calculará la probabilidad de ocurrencia y $F(x)$ es la probabilidad de que se presente el valor x de precipitación pluvial.

La ecuación de bondad de ajuste queda de la siguiente manera:

$$NW^2 = \frac{1}{12(32)/100} + \sum_{i=1}^{32} \left[F(x)_i - \frac{2i-1}{2(32)}\right]^2 \tag{15}$$

Los cálculos anteriores, aunque son simples, también son laboriosos en particular en el caso de la distribución gamma-incompleta, por lo que se sugiere el uso de programas de cómputo

Tabla 1. Precipitación total.

Año	n	pp ac.	Med/dia	Des.Est
1973	365	505.3	1.4	4.5
1974	365	339.6	0.9	4.1
1975	365	296.0	0.8	3.6
1976	365	558.0	1.5	5.2
1977	365	402.0	1.1	4.5
1978	365	370.2	1.0	4.3
1979	365	216.0	0.6	2.7
1980	365	291.0	0.8	3.7
1981	365	452.0	1.2	4.5
1982	365	309.0	0.8	4.3
1983	365	442.8	1.2	4.3
1984	365	421.5	1.2	3.9
1985	365	409.2	1.1	3.8
1986	365	447.3	1.2	4.5
1987	365	630.9	1.7	6.3
1988	365	389.7	1.1	3.9
1989	365	349.7	1.0	4.2
1990	365	649.4	1.8	6.9
1991	365	522.1	1.4	5.0
1992	365	470.7	1.3	4.0
1993	365	381.5	1.0	3.5
1994	365	495.9	1.4	4.3
1995	365	353.1	1.0	3.7
1996	366	301.8	0.8	3.4
1997	365	270.5	0.7	3.2
1998	365	318.8	0.9	4.1
1999	365	236.4	0.6	3.3
2000	365	317.1	0.9	4.4
2001	365	313.0	0.9	3.4
2002	365	693.7	1.9	6.7
2003	365	485.3	1.3	4.7
2004	366	578.0	1.6	4.3
Resumen				
	11682	413.0	1.1	4.4

para facilitar los mismos. En este caso en particular, se desarrolló un código en Scilab 3.0 (Scilab ©INRIA-ENPC) para efectuar los cálculos presentados.

Scilab es un paquete de software científico para cálculo numérico, el cual provee un entorno de cómputo para aplicaciones científicas y de ingeniería. Fue desarrollado en 1990 por investigadores del INRIA y ENPC. En la actualidad es mantenido y desarrollado por el consorcio Scilab desde su creación en mayo del 2003. Scilab se distribuye libremente como código abierto vía Internet desde 1994.

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2 y representan la probabilidad de ocurrencia de los valores de precipitación pluvial en mm. En la Figura 1 se aprecia la gráfica de probabilidad de ocurrencia de lluvia mediante las funciones de distribución gamma incompleta y normal. En el apéndice 1 se aprecia el código fuente utilizado para efectuar los cálculos. Dichos resultados permiten afirmar que los datos analizados presentan un ajuste adecuado a las funciones de distribución presentadas y son un buen ejemplo de la aplicación práctica de la probabilidad y la estadística a un problema de la vida real.

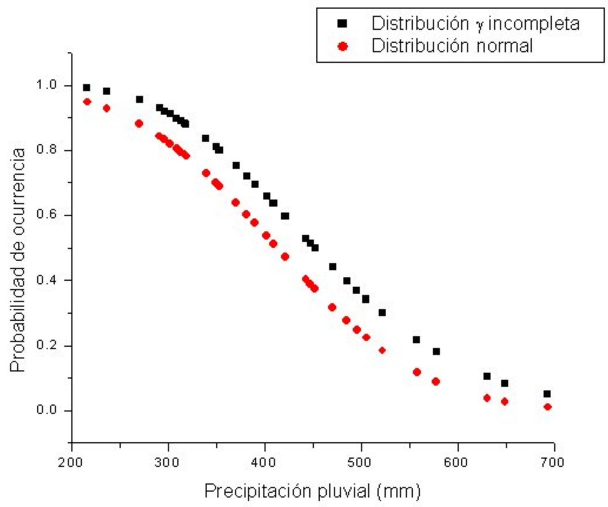

Figura 1. Probabilidad de ocurrencia de lluvia mediante las funciones de distribución gamma incompleta y normal.

Bibliografía

[1] Evans, Hastings, and Peacock (2000), Statistical Distributions, 3rd. Ed., John Wiley and Sons.

[2] Johnson, Kotz, and Balakrishnan, (1994), Continuous Univariate Distributions, Volumes I and II, 2nd. Ed., John Wiley and Sons.

Tabla 2. Precipitación pluvial (mm) y probabilidad de ocurrencia mediante las funciones de distribución gamma incompleta y normal.

PP (mm)	PG (%)	PN (%)
693.7	0.0497	0.0104
649.4	0.0841	0.0257
630.9	0.1035	0.0363
578.0	0.1795	0.0870
558.0	0.2173	0.1162
522.1	0.2982	0.1844
505.3	0.3417	0.2236
495.9	0.3675	0.2474
485.3	0.3977	0.2758
470.7	0.4411	0.3174
452.0	0.4990	0.3741
447.3	0.5138	0.3889
442.8	0.5281	0.4032
421.5	0.5963	0.4722
409.2	0.6356	0.5126
402.0	0.6583	0.5363
389.7	0.6963	0.5763
381.5	0.7210	0.6026
370.2	0.7539	0.6380
353.1	0.8006	0.6893
349.7	0.8094	0.6992
339.6	0.8343	0.7275
318.8	0.8800	0.7813
317.1	0.8834	0.7854
313.0	0.8913	0.7952
309.0	0.8987	0.8044
301.8	0.9112	0.8204
296.0	0.9206	0.8326
291.0	0.9281	0.8427
270.5	0.9541	0.8799
236.4	0.9815	0.9273
216.0	0.9905	0.9478

PP = Precipitación pluvial (mm)
PG = Probabilidad distribución gamma incompleta (%)
PN = Probabilidad distribución normal (%).

Código fuente en Scilab 3.0

```
// Calculo de probabilidad de lluvia
//mediante la función de distribución
// gamma-incompleta
// Programador:
// Rafael Magallanes Quintanar
clear
x = [ 505.3; 339.6; 296.0; 558.0;...
 402.0; 370.2; 216.0; 291.0; 452.0;...
 309.0; 442.8; 421.5; 409.2; ...
447.3; 630.9; 389.7; 349.7; 649.4;...
 522.1; 470.7; 381.5; 495.9; 353.1;...
 301.8; 270.5; 318.8; 236.4; ...
317.1; 313.0; 693.7; 485.3; 578.0 ];

n = length(x);
xbar = mean(x); //Media
xm = median(x); //Mediana
xmin = min(x); //valor mínimo
xmax = max(x); //valor máximo
rang = xmax-xmin; //Rango
sx = st_deviation(x);
//Desviación estándar
sx2 = sx^2; //Varianza
CVx = sx/xbar*100;
//Coeficiente de variación

// Parámetros de la
// distribución gamma

Alfa = xbar^2/sx2;
Beta = sx2/xbar;

// Cálculo de la
// distribución gamma
// Define fact(n)

deff('[f]=fact(n)',['f=1.0','for...
            i = 1:n, f=f*i, end'])

// Define gammai(x)

serie = 0;

deff('[p]=gammai(x)',['for ...
i = 1:round(Alfa),serie=serie...
                +1/fact(i)...
*(x/Beta)^i,end';'p=(1+serie)...
*exp(-x/Beta)']);
```

```
y=sort(x);

// Calculo de probabilidad con
//distribución gamma incompleta

for j = 1:n, probg(j)=gammai(y(j));,
end

// Calculo de probabilidad con
// distribución normal

for i = 1:n,[P,Q]=cdfnor("PQ",y(i),...
      xbar,sx);,probn(i)=Q;, end;

// Calculo de prueba de bondad
// de ajuste Smirnov

suma = 0;
for i = 1:n, suma = suma + (probn(i)...
              -(2*i-1)/(2*n))^2;,
end;
nw_normal = suma + 1/12*n/100;

suma = 0;
for i = 1:n, suma = suma + (probg(i)...
-(2*i-1)/(2*n))^2;, end;
nw_gamma = suma + 1/12*n/100;

// Impresión de resultados

printf('Media=%f\n\n',xbar)
printf('Varianza=%f\n\n',sx2)
printf('Alfa=%f\n\n',Alfa)
printf('Beta=%f\n\n',Beta)
probg
printf('nw^2=%f\n\n',nw_gamma)
probn
printf('nw^2=%f\n\n',nw_normal)

//end of script
```

Acerca del autor o autores

[1]Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica. Cuerpo académico de sistemas complejos. Zacatecas, Zac., México. Correo-e: magallan@cantera.reduaz.mx

[2]Centro Regional Universitario Centro Norte. Universidad Autónoma Chapingo. Apartado Postal 198, CP 98001, Zacatecas, Zac., Mexico. Tel. y Fax (01 492) 9246284 y 9246147. Correo-e: vacrida@hotmail.com

[*]Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Matemáticas. Dom. Conocido. Carretera a la Bufa esquina con Paseo Solidaridad. Zacatecas, Zac., México.